REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Menteri Hukum dan Hak Asasi Manusia Republik Indonesia, berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta yaitu Undang-Undang tentang perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra (tidak melindungi kekayaan intelektual lainnya), dengan ini menerangkan bahwa hal-hal tersebut di bawah ini telah tercatat dalam Daftar Umum Ciptaan:

I.	Nomor dan tanggal permohonan	:	C00201604506, 07 November 2016
II.	Pencipta		
	Nama	:	**Dra. SUSANAH, M.Pd.**
	Alamat	:	Gunung Sari Indah, Kel. Kedurus Kec. Karang Pilang, Kota Surabaya, Jawa Timur.
	Kewarganegaraan	:	Indonesia
III.	Pemegang Hak Cipta		
	Nama	:	**LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT (LPPM)-UNIVERSITAS NEGERI SURABAYA (UNESA)**
	Alamat	:	Kampus Unesa Ketintang Surabaya, Jawa Timur.
	Kewarganegaraan	:	-
IV.	Jenis Ciptaan	:	Buku
V.	Judul Ciptaan	:	**GEOMETRI ANALITIKA**
VI.	Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	01 Januari 2011, di Surabaya
VII.	Jangka waktu perlindungan	:	Berlaku selama 50 (lima puluh) tahun sejak pertama kali diumumkan.
VIII.	Nomor pencatatan	:	083693

Pencatatan Ciptaan atau produk Hak Terkait dalam Daftar Umum Ciptaan bukan merupakan pengesahan atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang dicatat. Menteri tidak bertanggung jawab atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang terdaftar. (Pasal 72 dan Penjelasan Pasal 72 Undang-undang Nomor 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta)

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
REPUBLIK INDONESIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL
u.b.
DIREKTUR HAK CIPTA DAN DESAIN INDUSTRI

Dr. Dra. Erni Widhyastari, Apt., M.Si.
NIP. 196003181991032001

ISBN 979-979-028-408-1

GEOMETRI ANALITIKA

(Edisi Revisi)

Dra. SUSANAH, M.Pd.

GEOMETRI ANALITIKA

Edisi Revisi

SUSANAH

Penerbit
Unesa University Press

Susanah

GEOMETRI ANALITIKA

Edisi Revisi

Diterbitkan Oleh
UNESA UNIVERSITY PRESS
Anggota IKAPI No. 060/JTI/97
Anggota APPTI No. 133/KTA/APPTI/X/2015
Kampus Unesa Ketintang Surabaya
Gedung C-15
Telp. 031 – 8288598; 8280009 ext. 109
Fax. 031 – 8288598
Email: unipressunesa@yahoo.com
unipress@unesa.ac.id

vii, 144 hal., Illus, 15.5 x 23
Cetakan 1, 2011
Cetakan 2, 2012
Cetakan 3, 2014
Cetakan 4, 2016

ISBN: 978-979-028-408-1

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku geometri analitika dan dapat diterbitkan.

Buku geometri analitika ditulis dengan tujuan untuk membantu mahasiswa matematika dan peminat matematika khususnya mahasiswa jurusan matematika UNESA. Geometri analitika adalah salah satu mata kuliah yang harus di program mahasiswa jurusan matematika UNESA.

Penulisan buku geometri analitika ini sebagian besar merupakan ide bapak Drs. Abdul Mu'in Safiudin (Alm) sebelum beliau pensiun dari staf pengajar di jurusan matematika UNESA tahun 2002. Proses penulisan buku ini penulis banyak dibantu oleh sejawat Rudianto Artiono, S.Pd, M.Si. staf pengajar di jurusan matematika UNESA.

Buku ini merupakan edisi revisi namun penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu saran dan kritik pembaca sangat diharapkan.

Akhirnya penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu sampai terselesainya penulisan buku ini.

Surabaya, Pebruari 2016

Penulis

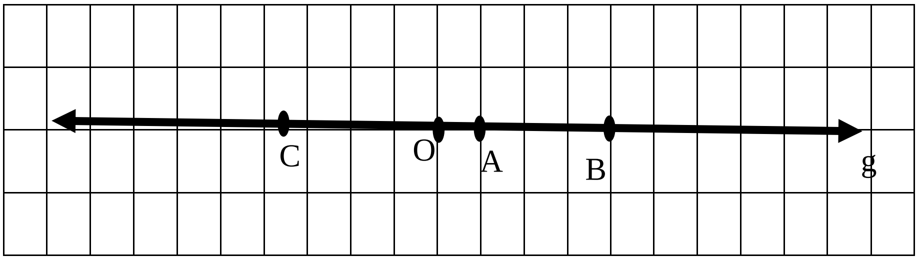
DAFTAR ISI

BAB I
SISTEM KOORDINAT

A. Letak Titik Pada R^1

Menentukan letak titik pada garis lurus g, maka pada garis g tersebut dibuat skala bilangan, sebagai berikut:
Perhatikan Gambar 1 (Gb. 1):

1) Ambil sebarang titik O pada garis g, yang selanjutnya disebut titik pangkal.



Gb. 1

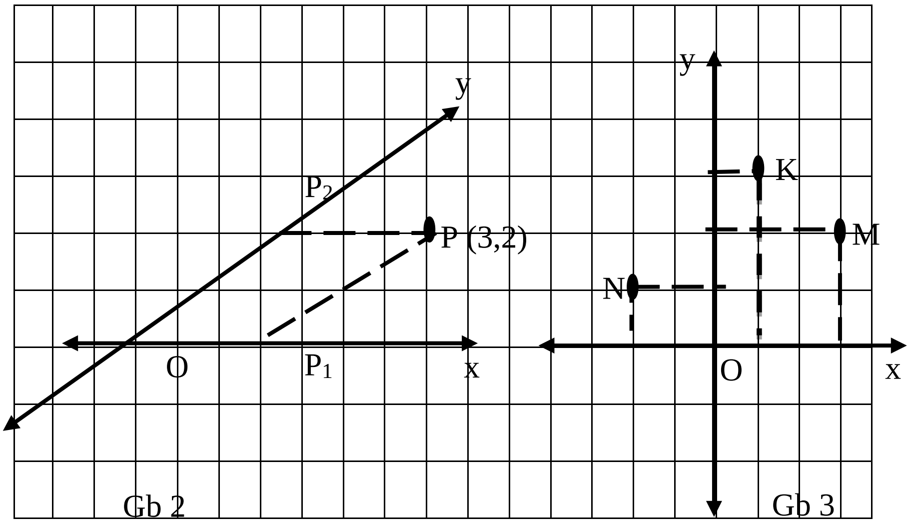
2). Menentukan titik A pada garis g sehingga panjang $\overline{OA}$ sebagai satuan panjang.

3). Menentukan arah positif dan arah negatif.
Arah positif adalah sebelah kanan titik O.
Jika O menyatakan titik pangkal, maka pada titik A kita beri tanda +1 atau 1. Titik A dikatakan berkoordinat 1, yang ditulis dengan lambang A(1).
Demikian juga dengan titik B yang berjarak 4 satuan di sebelah kanan O, dikata kan berkoordinat B(4), dan titik C yang berjarak $3\frac{1}{2}$ satuan di sebelah kiri O, dikatakan berkoordinat C($-3\frac{1}{2}$), jadi jarak dua titik (x_1) dan (x_2) adalah $|x_2 - x_1|$.

B. Letak Titik Pada R^2

Untuk menentukan letak titik pada bidang datar, kita buat dua garis yang berpotongan di titik O sebagai titik pangkal. Perhatikan Gb. 2 dan Gb. 3.

Garis x dan garis y berpotongan di titik O, sebagai titik pangkal. Garis x dan y membentuk sudut miring.



Tetapkan titik A pada sumbu x, sehingga OA = 1 satuan, dan titik B pada sumbu y, sehingga OB = 1 satuan, biasanya OA = OB.

Untuk menentukan letak titik P dengan cara ini, dilakukan sebagai berikut:
Melalui P dibuat garis sejajar garis y, yang memotong garis x di titik P_1, dan dibuat garis sejajar garis x, yang memotong garis y di titik P_2. Maka letak titik P ditentukan oleh OP_1 dan OP_2, yang ditulis dengan lambang $P(OP_1,OP_2)$. Pada Gb. 2 letak titik P ditulis dengan lambang P(3,2).
Selanjutnya garis x disebut sumbu x dan garis y disebut sumbu y, tata sumbu demikian disebut ***"Sistem Koordinat Kartesius Miring"***, sedangkan letak titik P dengan lambang $P(OP_1,OP_2)$ disebut ***koordinat titik P***.
OP_1 atau x_P disebut ***koordinat kesatu*** atau ***absis dari titik P***.

OP_2 atau y_P disebut ***koordinat kedua*** atau ***ordinat dari titik P***.
Pada Gb. 3, sumbu x dan sumbu y berpotongan tegak lurus, maka tata sumbu demikian disebut ***"Sistem Koordinat Kartesius Siku-siku"***.

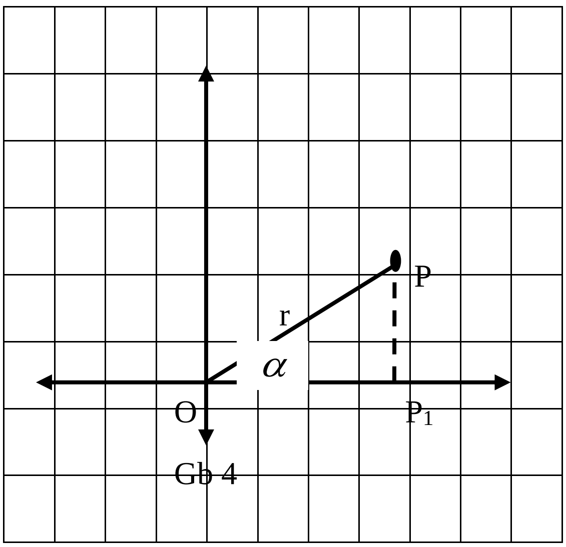
Selanjutnya dalam buku ini digunakan sistem koordinat kartesius siku-siku.

Tinjauan:

(1) Semua titik-titik di sebelah kanan sumbu y berabsis positif.
(2) Semua titik-titik di sebelah kiri sumbu y berabsis negatif.
(3) Semua titik-titik di sumbu y berabsis nol.
(4) Semua titik-titik di atas sumbu x berordinat positif.
(5) Semua titik-titik di bawah sumbu x berordinat negatif.
(6) Semua titik-titik di sumbu x berordinat nol.

Pada Gb. 3, titik-titik K, M dan N masing-masing berkoordinat K(1,3), M(3,2), N(-2,1) dan O berkoordinat O(0,0).

Cara lain untuk menentukan letak titik pada bidang datar ialah dengan menggunakan "sistem koordinat kutub" atau "sistem koordinat polar", sebagai berikut:
Perhatikan Gb. 4



Gb 4

OP = r

$m\angle XOP = \alpha$ (arah positif)
Dengan sistem koordinat kutub, maka koordinat titik P ditulis dengan lambang (r,α). Jika letak titik P ini dinyatakan dengan koordinat kartesius, maka didapatlah:

Pada ΔOPP_1 yaitu $OP_1 = OP \cos\alpha$ atau $x_P = r\cos\alpha$
$PP_1 = OP \sin\alpha$ atau $y_P = r\sin\alpha$

Jadi, koordinat titik P adalah P (r cos α, r sin α)

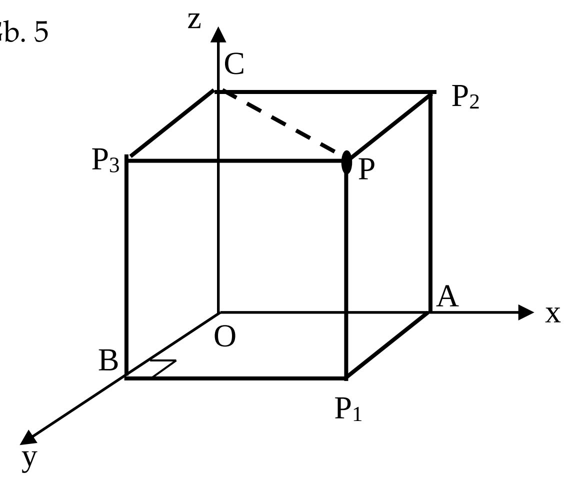
SOAL:

1. Nyatakanlah letak titik yang dinyatakan dalam koordinat kutub berikut menjadi koordinat kartesius: A (5,30°), B (6,45°) dan C (8,150°).
2. Nyatakanlah letak titik yang dinyatakan dalam koordinat kartesius berikut menjadi koordinat kutub: P(3,–4), K(4,5) dan S(–2,5).

C. Letak Titik di R^3

Untuk menentukan letak suatu titik pada ruang dimensi tiga, digunakan sistem sumbu siku-siku yang terdiri dari tiga sumbu, yaitu sumbu x, sumbu y dan sumbu z yang saling berpotongan tegak lurus di titik O.

Perhatikan Gb. 5



Gb 5

Menentukan letak titik P dengan cara sebagai berikut:

Proyeksikan titik pada bidang-bidang xoy, xoz dan yoz.
Misal P_1 adalah proyeksi titik P pada bidang xoy,
P_2 adalah proyeksi titik P pada bidang xoz, dan
P_3 adalah proyeksi titik P pada bidang yoz.
Maka letak titik P ditentukan oleh OA, AP_1 dan PP_1, yang ditulis dengan lambang P (OA, AP_1, PP_1) adalah koordinat titik P.

Selanjutnya OA = x_P (absis titik P)
AP_1 = y_P (ordinat titik P)
PP_1 = z_P (aplikat titik P)

Jadi, koordinat titik P ditulis P(x_P, y_P, z_P).

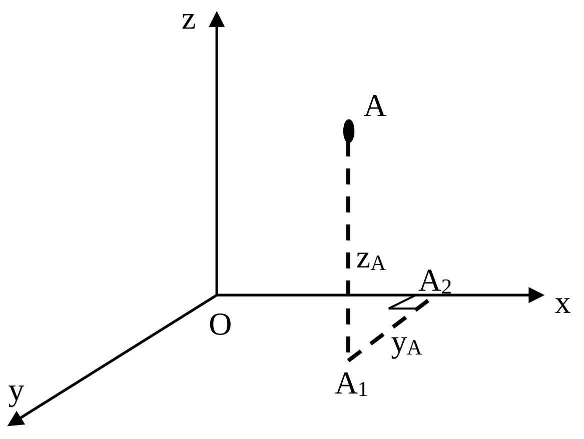
Perhatikan bahwa x_P = jarak titik P ke bidang yoz
y_P = jarak titik P ke bidang xoz
z_P = jarak titik P ke bidang xoy

Pada Gb. 5, tampak bahwa $OAP_1B.CP_2PP_3$ adalah sebuah balok yang dibuat dari unsur-unsur OA, AP_1 dan PP_1.

Jadi, OA = x_P, AP_1 = y_P dan PP_1 = z_P

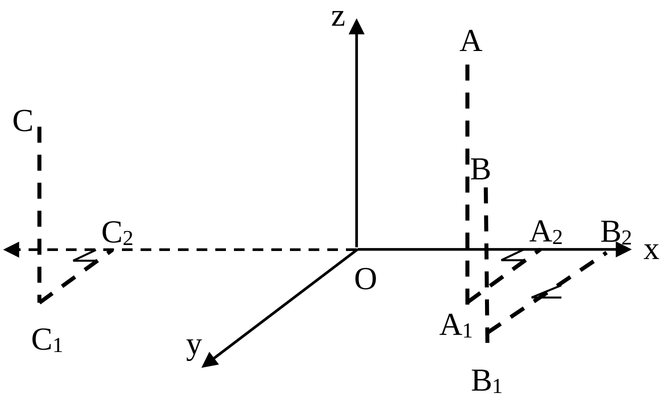
Selanjutnya cara menggambar koordinat titik A sebagai berikut:

1) Proyeksikan titik A pada bidang xoy, misal A_1 = proyeksi A pada bidang xoy.
2) Proyeksikan A_1 pada sumbu x, misal A_2 = proyeksi A_1 pada sumbu x
3) Maka $x_A = OA_2$, $y_A = A_1A_2$ dan $z_A = AA_1$



Gb 6

Tinjauan:
Semua titik-titik di sebelah kanan bidang yoz berabsis positif.
Semua titik-titik di sebelah kiri bidang yoz berabsis negatif.
Semua titik-titik pada bidang yoz berabsis nol.
Semua titik-titik di depan bidang xoz berordinat positif.
Semua titik-titik di belakang bidang xoz berordinat negatif.
Semua titik-titik pada bidang xoz berordinat nol.
Semua titik-titik di atas bidang xoy beraplikat positif.
Semua titik-titik di bawah bidang xoy beraplikat negatif.
Semua titik-titik pada bidang xoy beraplikat nol.
Perhatikan Gb. 7



Gb 7

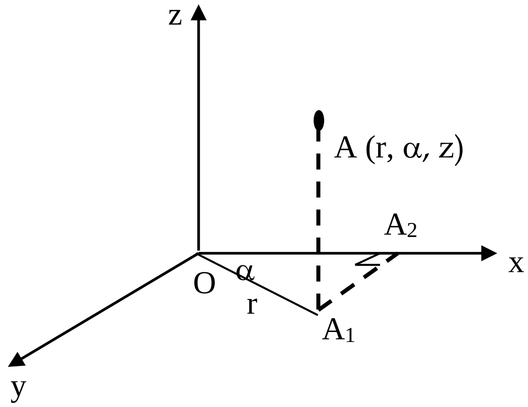
$OA_2 = 4$
$A_1A_2 = 3$ — Maka koordinat titik A adalah A(4, 3, 5)
$AA_1 = 5$

$OB_2 = 6$
$B_1B_2 = 5$ — Maka koordinat titik B adalah B(6, 5, 6)
$BB_1 = 6$

$OC_2 = -7$
$C_1C_2 = 3$ — Maka koordinat titik C adalah C(–7, 3, 4)
$CC_1 = 4$

Menentukan letak titik pada R^3 dengan tata sumbu demikian disebut koordinat titik pada *"Salib Sumbu Kartesius Siku-Siku"*.
Cara lain untuk menentukan letak suatu titik pada R^3 dengan menggunakan *"Sistem Koordinat Tabung"* atau *"Sistem Koordinat Silinder"*.

Perhatikan Gb. 8



Gb 8

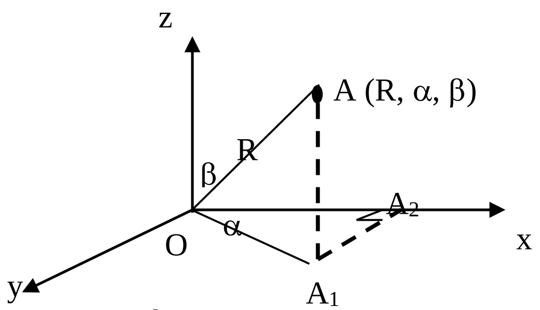
A_1 = proyeksi titik A pada bidang XOY.
$m\angle XOA_1 = \alpha$ (arah positif)
$OA_1 = r$
Maka letak titik A ditentukan oleh AA_1, r, dan α, dalam koordinat tabung adalah $A(r, \alpha, AA_1)$.

Jika koordinat tabung tersebut diubah menjadi koordinat siku-siku, maka:
Pada ΔOA_2A_1:
$OA_2 = OA_1 \cos\alpha = r\cos\alpha$

$A_1A_2 = OA_1 \sin\alpha = r\sin\alpha$
$AA_1 = z_A$

Jadi, koordinat titik A adalah $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha, z_A)$

Di samping itu kita juga mengenal *"Sistem Kordinat Bola"* atau *"Sistem Koordinat Sferik"*
Perhatikan Gb. 9



Gb 9

OA = R

$m\angle XOA_1 = \alpha$ (arah positif)

$m\angle ZOA = \beta$ (arah positif)

Maka koordinat titik A yang dinyatakan dalam koordinat bola menjadi koordinat kartesius siku-siku adalah, maka:

A_1 = proyeksi titik A pada bidang xoy

A_2 = proyeksi titik A_1 pada sumbu x

Pada ΔOAA_1 (siku-siku di A_1):

AA_1 = OA cos $\angle OAA_1$ atau AA_1 = R cos β

OA_1 = OA sin $\angle OAA_1$ atau OA_1 = R sin β

Pada ΔOA_2A_1 (siku-siku pada A_2):

OA_2 = OA_1 cos $\angle XOA_1$ atau

OA_2 = R sin β cos α atau OA_2 = R cos α sin β

A_1A_2 = OA_1 sin $\angle XOA_1$ atau

A_1A_2 = R sin β sin α atau A_1A_2 = R sin α sin β

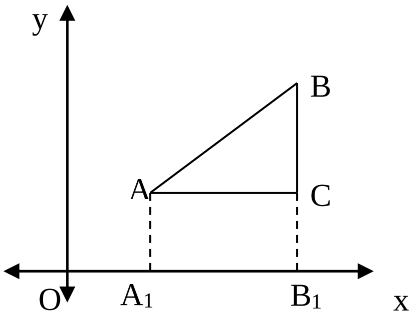
Jadi koordinat titik A adalah:

A (R cos α sin β, R sin α sin β, R cos β)

SOAL:

1. Titik A dinyatakan dalam koordinat tabung A (7, $60°$, 5). Nyatakan letak titik A tersebut dalam koordinat kartesius siku-siku
2. Titik B dinyatakan dalam koordinat bola B (6, $30°$, $45°$). Nyatakanlah letak titik B tersebut dalam koordinat kartesius siku-siku

D. Jarak Dua Titik di R²



Gb. 10

Jika diketahui dua titik A dan B atau panjang $\overline{AB}$ dilakukan cara berikut:
Perhatikan Gb. 10
A_1 = proyeksi titik A pada sumbu x
B_1 = proyeksi titik B pada sumbu x
C = proyeksi titik A pada $\overline{BB_1}$
Pada ΔABC (siku-siku di C):

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (Dalil Pythagoras)

$$\Leftrightarrow AB^2 = A_1B_1^{\ 2} + \left(BB_1 - CB_1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \left(OB_1 - OA_1\right)^2 + \left(BB_1 - AA_1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \left(x_B - x_A\right)^2 + (y_B - y_A)^2$$

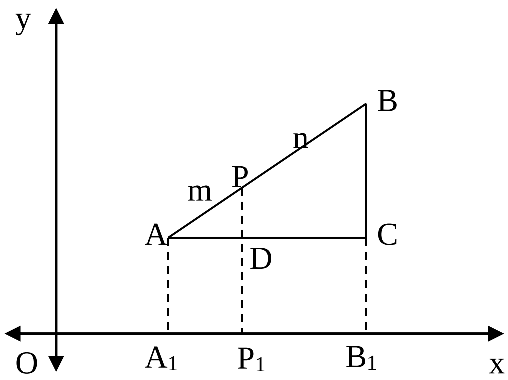
$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$atau\, AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Δx = selisih absis A dan B
Δy = selisih ordinat A dan B

Contoh:
Diketahui: titik-titik A dan B dengan koordinat A(–3,1) dan B(3, 5).
Hitunglah panjang $\overline{AB}$
Jawab: A(–3,1) dan B(3, 5)
Maka $\Delta x = x_B - x_A = 3 - (-3) = 6$
$\Delta y = y_B - y_A = 5 - 1 = 4$
Jadi, $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

E. Letak Titik di antara Dua Titik di R²



Gb. 11

Jika diketahui dua titik A dan B dengan posisi yang telah ditentukan. Maka koordinat titik P dapat dicari sebagai berikut:
Misal AP : PB = m : n
Perhatikan Gb. 11
A_1 = proyeksi titik A pada sumbu x
B_1 = proyeksi titik B pada sumbu x
P_1 = proyeksi titik P pada sumbu x
C = proyeksi titik A pada $\overline{BB_1}$
D = titik potong $\overline{AC}$ dan $\overline{PP_1}$
Pada ΔABC (siku-siku di C), dan $\overline{PD} // \overline{BC}$

Maka $\Delta ABC \sim \Delta APD$ (selidikilah!)

Jadi AC : AD = BC : PD = AB : AP

- Untuk AC : AD = AB : AP

$\Leftrightarrow A_1B_1 : A_1P_1 = (m+n) : m$

$\Leftrightarrow (OB_1 - OA_1) : (OP_1 - OA_1) = (m+n) : m$

$\Leftrightarrow (x_B - x_A) : (x_P - x_A) = (m+n) : m$

$\Leftrightarrow (x_P - x_A)(m+n) = (x_B - x_A)m$

$\Leftrightarrow (m+n)x_P - (m+n)x_A = mx_B - mx_A$

$\Leftrightarrow (m+n)x_P = mx_B + nx_A$

$\Leftrightarrow x_P = \dfrac{mx_B + nx_A}{m+n}$

- Untuk BC : PD = AB : AP

$\Leftrightarrow (BB_1 - CB_1) : (PP_1 - DP_1) = (m+n) : m$

$\Leftrightarrow (BB_1 - AA_1) : (PP_1 - AA_1) = (m+n) : m$

$\Leftrightarrow (y_B - y_A) : (y_P - y_A) = (m+n) : m$

$\Leftrightarrow (y_P - y_A)(m+n) = (y_B - y_A)m$

$\Leftrightarrow (m+n)y_P - my_A - ny_A = my_B - my_A$

$\Leftrightarrow (m+n)y_P = my_B + ny_A$

$\Leftrightarrow y_P = \dfrac{my_B + ny_A}{m+n}$

Jadi, koordinat titik P adalah P$\left[\dfrac{mx_B + nx_A}{m+n}, \dfrac{my_B + ny_A}{m+n}\right]$

Jika titik P terletak pada pertengahan $\overline{AB}$ berarti PA : PB = m : m karena m = n

Jadi, $x_P = \dfrac{x_B + x_A}{2}$, $y_P = \dfrac{y_B + y_A}{2}$

Atau koordinat titik P adalah P$\left[\dfrac{x_B + x_A}{2}, \dfrac{y_B + y_A}{2}\right]$

Contoh:

Diketahui titik-titik A dan B dengan koordinat A (4,–3) dan B (2, 7).

Ditanya: koordinat titik tengah $\overline{AB}$

Jawab: A (4,–3) dan B (2, 7)

Misal T adalah titik tengah $\overline{AB}$

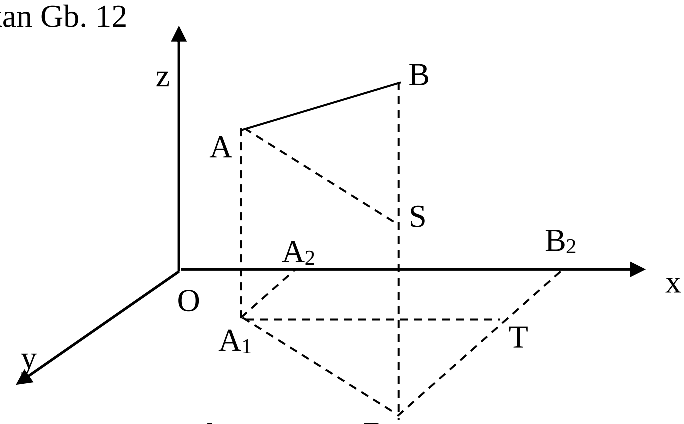
Maka $x_T = \dfrac{x_B + x_A}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3$

$$y_T = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$$

Jadi, koordinat titik T adalah T (3, 2)

F. Jarak Dua Titik di R^3

Perhatikan Gb. 12



Gb 12

Jika diketahui dua titik A dan B, maka untuk menentukan jarak antara A dan B atau panjang $\overline{AB}$ dilakukan cara berikut:

A_1 = proyeksi titik A pada bidang xoy

B_1 = proyeksi titik B pada bidang xoy

A_2 = proyeksi titik A_1 pada sumbu x

B_2 = proyeksi titik B_1 pada sumbu x

S = proyeksi titik A pada $\overline{BB_1}$

T = proyeksi titik A_1 pada $\overline{B_1B_2}$

Pada ΔABS (siku-siku di S), menurut dalil pythagoras:

$$AB^2 = AS^2 + BS^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = A_1B_1^{\ 2} + (BB_1 - SB_1)^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = A_1B_1^{\ 2} + (BB_1 - AA_1)^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = A_1B_1^{\ 2} + (z_B - z_A)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Pada ΔA_1B_1T (siku-siku di T), menurut dalil pythagoras:

$$A_1B_1^{\ 2} = A_1T^2 + B_1T^2$$

$$\Leftrightarrow A_1B_1^{\ 2} = A_2B_2^{\ 2} + (B_1B_2 - TB_2)^2$$

$$\Leftrightarrow A_1B_1^{\ 2} = (OB_2 - OA_2)^2 + (B_1B_2 - A_1A_2)^2$$

$$\Leftrightarrow A_1B_1^{\ 2} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

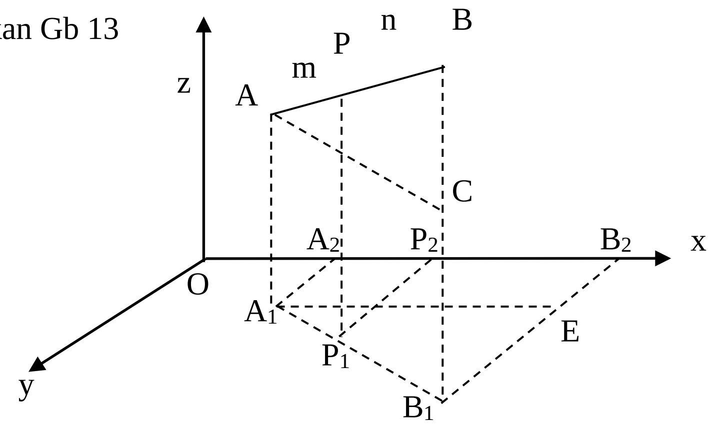
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Jadi $\quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

G. Letak Titik di antara Dua Titik di R^3

Perhatikan Gb 13



Gb 13

Jika diketahui dua titik A dan B serta titik P yang terletak di antara A dan B dengan posisi tertentu, maka koordinat titik P dapat ditentukan dengan cara berikut:
Misal PA : PB = m : n

A_1 = proyeksi titik A pada bidang xoy

B_1 = proyeksi titik B pada bidang xoy

P_1 = proyeksi titik P pada bidang xoy

C = proyeksi titik A pada $\overline{BB_1}$

D = titik potong $\overline{AC}$ dan $\overline{PP_1}$

A_2 = proyeksi titik A_1 pada sumbu x

B_2 = proyeksi titik B_1 pada sumbu x

P_2 = proyeksi titik P_1 pada sumbu x

E = proyeksi titik A_1 pada $\overline{B_1B_2}$

F = titik potong $\overline{A_1E}$ dan $\overline{P_1P_2}$

A_3 = proyeksi titik A_1 pada sumbu y

B_3 = proyeksi titik B_1 pada sumbu y

P_3 = proyeksi titik P_1 pada sumbu y

G = proyeksi A_1 pada $\overline{B_1B_3}$

H = titik potong $\overline{A_1G}$ dan $\overline{P_1P_3}$

Perhatikan ΔABC (siku-siku di C), $\overline{PD} // \overline{BC}$,

maka $\Delta ABC \sim \Delta APD$ (selidikilah!)

Jadi, $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{PD} = \frac{AB}{AP}$

Untuk $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AP}$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1B_1}{A_1P_1} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1E}{A_1F} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_2B_2}{A_2P_2} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(OB_2 - OA_2)}{(OP_2 - OA_2)} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_B - x_A)}{(x_P - x_A)} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(x_P - x_A) = m(x_B - x_A)$$

$$\Leftrightarrow (m+n)x_P - mx_A - nx_A = mx_B - mx_A$$

$$\Leftrightarrow (m+n)x_P = mx_B + nx_A$$

$$\Leftrightarrow x_P = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}$$

Untuk $\frac{A_1B_1}{A_1P_1} = \frac{m+n}{m}$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1G}{A_1H} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_3B_3}{A_3P_3} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(OB_3 - OA_3)}{(OP_3 - OA_3)} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y_B - y_A)}{(y_P - y_A)} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(y_P - y_A) = m(y_B - y_A)$$

$$\Leftrightarrow (m+n)y_P - my_A - ny_A = my_B - my_A$$

$$\Leftrightarrow (m+n)y_P = my_B + ny_A$$

$$\Leftrightarrow y_P = \frac{my_B + ny_A}{m+n}$$

Untuk $\dfrac{BC}{PD} = \dfrac{AB}{AP}$

$$\Leftrightarrow \frac{(BB_1 - CB_1)}{(PP_1 - DP_1)} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(BB_1 - AA_1)}{(PP_1 - AA_1)} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z_B - z_A)}{(z_P - z_A)} = \frac{m+n}{m}$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(z_P - z_A) = m(z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (m+n)z_P - mz_A - nz_A = mz_B - mz_A$$

$$\Leftrightarrow (m+n)z_P = mz_B + nz_A$$

$$\Leftrightarrow Z_P = \frac{mz_B + nz_A}{m+n}$$

Jadi, koordinat titik P adalah:

$$P\left(\frac{mx_B + nx_A}{m+n}, \frac{my_B + ny_A}{m+n}, \frac{mz_B + nz_A}{m+n}\right)$$

Jika titik P terletak pada pertengahan $\overline{AB}$, maka PA : PB = m : m karena m = n

Jadi,

$$x_P = \frac{x_B + x_A}{2},\ y_P = \frac{y_B + y_A}{2} \text{ dan } z_P = \frac{z_B + z_A}{2}$$

Maka, koordinat titik P adalah:

$$P\left(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2}, \frac{z_B + z_A}{2}\right)$$

Contoh:

Diketahui: A (–3, 4, 1) dan B (2, –5, 3)

Ditanyakan: Tentukan koordinat titik tengah $\overline{AB}$

Jawab: $x_T = \dfrac{x_B + x_A}{2} = \dfrac{2-3}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$y_T = \dfrac{y_B + y_A}{2} = \dfrac{-5+4}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$z_T = \dfrac{z_B + z_A}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$

Jadi, koordinat titik T adalah $T\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 2\right)$

SOAL:

1. Diketahui: Titik-titik A (2, 5), B (–3, 2), C (0, 3) yang membentuk ΔABC

   Tentukan: a. Panjang sisi-sisi ΔABC.

   b. Panjang ketiga garis berat ΔABC, dan

   c. Koordinat titik berat ΔABC

2. Diketahui: Titik-titik A (–3, 2, 5), B (1, –3, 2), C (4, 3, 2) yang membentuk ΔABC

   Tentukan: a. Panjang sisi-sisi ΔABC.

   b. Panjang ketiga garis berat ΔABC, dan

   c. Koordinat titik berat ΔABC

BAB II
GARIS LURUS

A. Garis Lurus di R^2

Persamaan linear dalam dua variable x dan y, bentuk umumnya adalah:

$y = mx + n$, dengan $m, n \in R$ ….. (bentuk eksplisit), atau

$ax + by + c = 0$, dengan $a, b, c \in R$ ….. (bentuk implisit)

Persamaan linear dalam dua variabel x dan y tersebut grafiknya pada sistem salib sumbu kartesius berupa garis lurus.

Untuk membuktikannya dilakukan dengan cara sebagai berikut:

Diketahui : $g \equiv ax + by + c = 0$

Buktikan : grafik g adalah garis lurus.

Bukti : Ambil sebarang 2 titik berbeda yang terletak pada g, misal titik A (x_A, y_A) dan titik B (x_B, y_B). Maka didapat:

$ax_A + by_A + c = 0$ ………….. (1)

dan $ax_B + by_B + c = 0$ …………... (2)

Ambillah sebarang titik P yang terletak di antara A dan B.

Misal PA : PB = m : n

Maka $x_p = \dfrac{mx_B + nx_A}{m+n}$ dan $y_p = \dfrac{my_B + ny_A}{m+n}$

Bila koordinat titik P memenuhi persamaan g, maka titik P juga terletak pada g. Berarti g tentu grafiknya berupa garis lurus. Bila titik P terletak pada garis g, maka:

$$ax + by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a \bullet \frac{m\,x_B + n\,x_A}{m+n} + b \bullet \frac{m\,y_B + n\,y_A}{m+n} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a(m\,x_B + n\,x_A) + b(m\,y_B + n\,y_A) + c(m+n) = 0$$

$$\Leftrightarrow am\,x_B + an\,x_A + bm\,y_B + bn\,y_A + cm + cn = 0$$

$$\Leftrightarrow m(ax_B + by_B + c) + n(ax_A + by_A + c) = 0$$

Menurut (1) dan (2) $\rightarrow$ $m.0 + n.0 = 0$ (benar)

Jadi, grafik g berupa garis lurus.

Dapat juga dibuktikan dengan cara berikut:

(1) Ambillah pasangan terurut (x, y) cukup banyak yang memenuhi persaamaan g tersebut.

(2) Anggaplah pasangan terurut (x, y) tersebut sebagai pasangan koordinat titik, dan lukislah titik itu pada sistem salib sumbu kartesius.

(3) Hubungkanlah titik-titik tersebut yang satu dengan yang lain. Maka didapatlah grafik garis lurus itu.

Kerjakan yang berikut ini:

Dengan cara mengambil pasangan terurut yang cukup banyak, tunjukkan bahwa $g \equiv 3x + y - 2 = 0$ grafiknya berupa garis lurus!

B. Menggambar Grafik Garis Lurus

Jika diketahui persamaan garis lurus, maka menggambar grafik garis lurus tersebut dilakukan cara berikut:

1. Menentukan sebarang dua pasangan terurut yang memenuhi persamaan garis tersebut,
2. Dua pasangan terurut itu digambar sebagai dua koordinat titik pada sistem salib sumbu kartesius,
3. Garis tersebut adalah garis yang melalui dua titik itu.

Dua titik tersebut biasanya diambil sebagai titik potongnya dengan sumbu-sumbu koordinat.

Contoh:

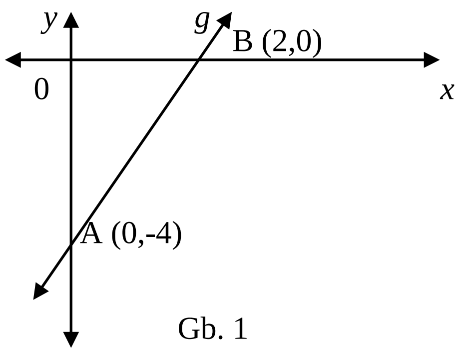
Gambarlah grafik garis lurus yang persamaannya $g \equiv 2x - y - 4 = 0$

Jawab:

$g \equiv 2x - y - 4 = 0$ Untuk $x = 0$ $\rightarrow$ $2 \cdot x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4$, maka titik potong garis g dengan sumbu y adalah A (0,–4)

Untuk $y = 0 \rightarrow 2x - 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ maka titik potong garis g dengan sumbu x adalah B (2, 0)

Maka garis g adalah garis yang melalui titik A dan B (Gb. 1)



Gb. 1

C. Titik Potong Dua Garis Lurus

Garis g dan k yang persamaannya adalah:

$$g \equiv a_1x + b_1y + c = 0$$
$$k \equiv a_2x + b_2y + c = 0$$

Untuk menentukan koordinat titik potong garis-garis g dan k , dilakukan cara berikut ini:
Misalkan P = titik potong g dan k, maka titik P terletak pada garis g, yang berarti koordinat titik P memenuhi persamaan garis g,

$a_1x + b_1y + c = 0$ ………………….. (1)

Titik P juga terletak pada garis k, yang berarti koordinat titik P mememnuhi persamaan garis k,

$a_2x + b_2y + c = 0$ ………………….. (2)

Dari (1) dan (2), maka x dan y dapat ditentukan. Jadi didapatlah koordinat titik potong garis-garis g dan k tersebut.

Contoh:
Tentukanlah koordinat titik potong garis $g_1 \equiv y = x + 1$ dan $g_2 \equiv 2x + y - 4 = 0$
Jawab:

$g_1 \equiv y = x + 1$; $g_2 \equiv 2x + y - 4 = 0$

Misal A titik potong g_1 dan g_2, maka:

$$y_A = x_A + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_A - y_A + 1 = 0 \text{ ……………. (1)}$$
$$2x_A + y_A - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_A + y_A - 4 = 0 \text{ ……………. (2)}$$
$$3x_A \quad - 3 = 0 \Leftrightarrow x_A = 1 \text{ …..(3)}$$

Substitusi persamaan (3) ke persamaan (1), didapat:

$1 - y_A + 1 = 0 \Leftrightarrow y_A = 2$

Jadi, titik potong g_1 dan g_2 adalah A (1, 2)

SOAL:

Diketahui: $g_1 \equiv x - 2y + 4 = 0,$
$g_2 \equiv 4x + 3y + 5 = 0$ dan
$g_3 \equiv 6x - y + 15 = 0,$

jika g_1, g_2 dan g_3 membentuk ΔABC dengan $A = (g_1, g_2)$, $B = (g_1, g_3)$ dan $C = (g_2, g_3)$ maka tentukan:

1. Koordinat titik-titik sudut ΔABC
2. Panjang sisi-sisi ΔABC
3. Panjang ketiga garis berat ΔABC
4. Koordinat titik berat ΔABC

D. Gradien Garis Lurus

Perhatikan garis g yang persamaannya $g \equiv mx + n$ dengan m, $n \in R$

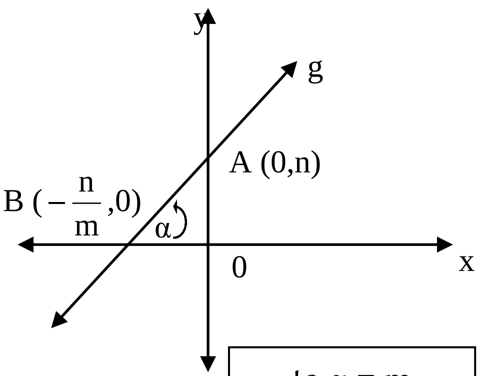
Untuk x = 0 → y = n, maka titik potong dengan sumbu y adalah A (0, n)

Untuk y = 0 → mx + n = 0 ↔ $x = -\frac{n}{m}$, maka titik potong dengan sumbu x adalah B ($-\frac{n}{m}$, 0)

Misal α = sudut antara garis g dengan sumbu x (arah positif).

Perhatikan ΔOAB (Gb. 2)

Maka garis g adalah garis AB (Gb. 2)



Jadi,

$$\boxed{\text{tg } \alpha = m}$$

Definisi:

Gradien garis g adalah tangen sudut antara garis g dengan sumbu x (arah positif)

Contoh:
Tentukanlah sudut antara garis $g \equiv 2y = x - 3$ dengan sumbu x (arah positif)
Jawab:

$g \equiv 2y = x - 3 \quad \leftrightarrow \quad g \equiv y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

maka gradien garis g, $m_g = \frac{1}{2}$

Misal β = sudut antara garis g dengan sumbu x (arah positif)

Maka tg β = $m_g = \frac{1}{2}$

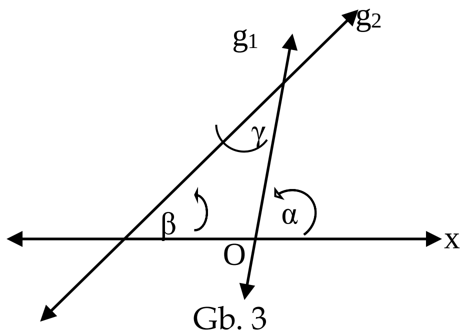
$$\Leftrightarrow tg\ \beta = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad tg\ \beta = tg\ 26°34'$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta = 26°34'$$

Jadi, sudut antara garis k dengan sumbu x adalah $26°34'$

E. Sudut Antara Dua Garis Lurus

Perhatikan Gb. 3



Gb. 3

Garis g membentuk sudut α dengan sumbu x (arah positif)
Garis g membentuk sudut β dengan sumbu x (arah positif)
Misal γ = sudut antara g_1 dan g_2

Maka $\beta + \gamma = \alpha$

$\Leftrightarrow \quad \gamma = \alpha - \beta$

$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\,\gamma = \text{tg}\,(\alpha - \beta)$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\gamma = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha.\text{tg}\beta}$$

Misal gradien garis $g_1 = m_{g1}$ dan gradien garis $g_2 = m_{g2}$
maka tg $\alpha = m_{g1}$ dan tg $\beta = m_{g2}$
Jadi

$$\text{tg}\gamma = \frac{m_{g_1} - m_{g_2}}{1 + m_{g_1}.m_{g_2}}$$

Contoh:
Diketahui: garis g dan garis k dengan persamaan :
$g \equiv 2y - x - 5 = 0$
$k \equiv y = 3x + 1$

Ditanyakan : Hitunglah sudut antara garis g dan garis k
Jawab : $g \equiv 2y - x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad g \equiv 2y = x + 5$

$\Leftrightarrow \quad g \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

maka $m_g = \frac{1}{2}$

$k \equiv y = 3x + 1$ maka $m_k = 3$
Misal α = sudut antara g dan k, maka

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{m_g - m_k}{1 + m_g.m_k} = \frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{1}{2}.3} = \frac{-2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = -1$$

$\Leftrightarrow \quad \alpha =$ arctg (-1) = 135^0 , karena sudut yang dibentuk dua garis adalah lancip maka $\alpha = (180^0 - 135^0) = 45^0$
Jadi sudut antara garis g dan garis k adalah 45^0

Tinjauan :

Perhatikan Gb. 3 dan rumus $\text{tg}\ \gamma = \dfrac{m_{g_1} - m_{g_2}}{1 + m_{g_1}.m_{g_2}}$

1. Bila garis g_1 tegak lurus garis g_2, maka $\gamma = 90^0$

$$\text{Jadi } \operatorname{tg} 90^0 = \frac{m_{g_1} - m_{g_2}}{1 + m_{g_1}.m_{g_2}}$$

$$t.d = \frac{m_{g_1} - m_{g_2}}{1 + m_{g_1}.m_{g_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m_{g1}.\ m_{g2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{m_{g1}.\ m_{g2} = -1 \text{ atau } m_{g1} = -\frac{1}{m_{g2}}}$$

2. Bila garis g_1 sejajar garis g_2, maka $\gamma = 0^0$

$$\text{Jadi } \operatorname{tg} 0^0 = \frac{m_{g_1} - m_{g_2}}{1 + m_{g1}.m_{g2}}$$

$$0 = \frac{m_{g_1} - m_{g_2}}{1 + m_{g_1}.m_{g_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_{g1} - m_{g2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{m_{g1} = m_{g2}}$$

F. Garis Lurus Melalui Sebuah Titik dan Diketahui Gradiennya

Akan ditentukan persamaan gars lurus yang dinyatakan dalam gradiennya dan melalui sebuah titik tertentu.

Misal garis g dengan gradien m_g, dan melalui titik S, maka persamaan garis g ditentukan dengan cara sebagai berikut :

Garis g dengan gradien m_g, persamaannya adalah $g \equiv y = m_g\, x + n$,

n adalah bilangan real.

Garis g melalui titik S, berarti koordinat titik S memenuhi persamaan garis g.

Maka $\quad y_s = m_g\, x_s + n$

$\Leftrightarrow \quad n = y_s - m_g\, x_s$

$\Leftrightarrow \quad g \equiv y - y_s = m_g\, x - m_g\, x_s$

Jadi $\boxed{g \equiv y - y_s = m_g\,(x - x_s)}$ adalah persamaan garis g melalui titik S dengan gradien m_g

Contoh:

Diketahui : $g \equiv 2x - y + 3 = 0$
P (3,-1)

Tentukan : a. Persamaan garis lurus yang melalui titik P dan sejajar garis g
b. Persamaan garis lurus yang melalui titik P dan tegak lurus garis g

Jawab : $g \equiv 2x - y + 3 = 0$
$\Leftrightarrow g \equiv y = 2x + 3$

a. Misal garis k dengan gradien m_k dan melalui titik P
Maka persamaan garis k adalah
$k \equiv y - y_p = m_k\,(x - x_p)$
$\Leftrightarrow \quad k \equiv y + 1 = m_k\,(x - 3)$
Jika $k \,//\, g$, maka $m_k = m_g = 2$
Jadi $k \equiv y + 1 = 2\,(x - 3)$
$\Leftrightarrow \quad k \equiv y + 1 = 2x - 6$
$\Leftrightarrow \quad k \equiv 2x - y - 7 = 0$

b. Misal garis l dengan gradien m_l dan melalui titik P,
Maka persamaan garis l adalah
$l \equiv y - y_p = m_l\,(x - x_p)$
$\Leftrightarrow \quad l \equiv y + 1 = m_l\,(x - 3)$
Jika l tegak lurus g, maka $m_l = -\dfrac{1}{m_g} = -\dfrac{1}{2}$

Jadi $l \equiv y + 1 = -\dfrac{1}{2}\,(x - 3)$

$\Leftrightarrow \quad l \equiv y + 1 = -\dfrac{1}{2}x + -\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad l \equiv \dfrac{1}{2}x + y - \dfrac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad l \equiv x + 2y - 1 = 0$

SOAL:

1. Diketahui : garis-garis g dan k dengan persamaan :
   $l \equiv 2x - 2y - 3 = 0$
   $k \equiv y = 2x - 1$
   Tentukan:
   a. Sudut antara garis l dengan sumbu x dan garis k dengan sumbu x
   b. Sudut antara garis l dan garis k
2. Diketahui : garis-garis g_1 dan g_2 dengan persamaan :
   $g_1 \equiv x - 2y - 4 = 0$
   $g_2 \equiv y = 2x + 3$
   Tentukan:
   a. Persamaan garis yang melalui pusat salib sumbu 0 dan sejajar garis g_1
   b. Persamaan garis yang melalui pusat salib sumbu 0 dan tegak lurus garis g_2
   c. Persamaan garis yang melalui titik potong g_1 dan g_2 dan tegak lurus garis g_1

G. Garis Lurus Melalui Dua Titik

Jika ditentukan titik A dan B maka persamaan garis lurus yang melalui dua titik A dan B tersebut dilakukan dengan cara berikut ini :
Misal garis AB adalah $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$

Jadi $\overleftrightarrow{AB} \equiv y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$ .... (1)

A pada $\overleftrightarrow{AB} \longrightarrow y_A = \mathrm{m}x_A + \mathrm{n}$ .... (2)

B pada $\overleftrightarrow{AB} \longrightarrow y_B = \mathrm{m}x_B + \mathrm{n}$ .... (3)

Jika persamaan (1) dikurangi persamaan (2) diperoleh:

$y - y_A = (\mathrm{m}x + \mathrm{n}) - (\mathrm{m}x_A + \mathrm{n})$

$\Leftrightarrow y - y_A = \mathrm{m}x - \mathrm{m}x_A$

$\Leftrightarrow y - y_A = \mathrm{m}(x - x_A)$

$\Leftrightarrow \mathbf{m} = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$ .... (4)

Jika persamaan (3) dikurangi persamaan (2) diperoleh:

$y_B - y_A = (\mathrm{m}x_B + \mathrm{n}) - (\mathrm{m}x_A + \mathrm{n})$

$\Leftrightarrow y_B - y_A = \mathrm{m}x_B - \mathrm{m}x_A$

$\Leftrightarrow y_B - y_A = m(x_B - x_A)$

$\Leftrightarrow \mathbf{m} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .... (5)

Dari persamaan (4) dan persamaan (5) diperoleh:

$$\mathbf{m} = \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$\boxed{\dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A}}$ $\Leftrightarrow$ adalah persamaan garis AB yang melalui titik A dan titik B

Contoh :

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik A(-3,1) dan B(2,3)

Jawab :

Persamaan garis AB adalah $\overleftrightarrow{AB} \equiv \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A}$

$$\overleftrightarrow{AB} \equiv \frac{y-1}{2} = \frac{x-(-3)}{5}$$

$$\overleftrightarrow{AB} \equiv 5(y-1) = 2(x+3)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \equiv 5y - 5 = 2x + 6$$

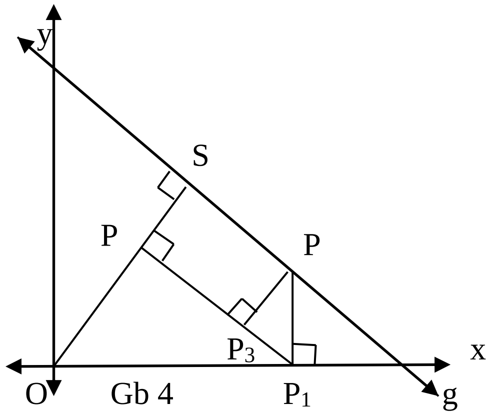
$$\overleftrightarrow{AB} \equiv 2x - 5y + 11 = 0$$

SOAL:

Diketahui: Titik-titik A(5,1), B(3,-5), dan C(2,2) membentuk segitiga ABC

Tentukan:
1. Persamaan sisi segitiga ABC
2. Persamaan ketiga garis berat segitiga ABC
3. Persamaan ketiga garis tinggi segitiga ABC

H. Persamaan Garis Lurus Dalam Bentuk Normal



Perhatikan Gb. 4

Titik S terletak pada garis g, dan $\overline{OS}$ tegak lurus garis g.

Panjang segmen $\overline{OS}$ = p

$\overline{OS}$ membentuk sudut α dengan sumbu x (arah positif)

Dari pernyataan tersebut, maka garis *g* tertentu oleh besaran p dan α. Berarti persamaan garis *g* dapat dinyatakan oleh besaran p dan α tersebut.

Untuk menentukan persamaan garis *g* dilakukan cara berikut :
Ambil sebarang titik P pada garis *g*
P_1 = Proyeksi P pada sumbu x
P_2 = Proyeksi P_1 pada $\overline{OS}$
P_3 = Proyeksi P pada $P_1 P_2$

Pada $\Delta\, PP_1P_3$ ⇢ $\angle PP_1P_3 = 90^0 - \angle OP_1P_2$
Pada $\Delta\, OP_1P_2$ ⇢ $\angle OP_1P_2 = 90^0 - \alpha$
Jadi pada $\Delta\, PP_1P_3$ ⇢ $\angle PP_1P_3 = 90^0 - (90^0 - \alpha)$
$\Leftrightarrow \angle PP_1P_3 = \alpha$
maka $PP_3 = PP_1 \sin \angle PP_1P_3$
$\Leftrightarrow PP_3 = y_p \sin\alpha$

Dari $SP_2 = PP_3 \Leftrightarrow SP_2 = y_p \sin\alpha$
Pada $\Delta\, OP_1P_2$ ⇢ $OP_2 = OP_1 \cos\alpha$
$OP_2 = x_p \cos\alpha$
sedangkan $OS = OP_2 + SP_2$
$p = x_p \cos\alpha + y_p \sin\alpha$
$\Leftrightarrow x_p \cos\alpha + y_p \sin\alpha - p = 0$

Jika koordinat titik P dijalankan, maka didapat persamaan garis g tersebut

$\boxed{g \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0}$ adalah persamaan garis dalam bentuk normal.

p = jarak dari titik 0 ke garis g

α = sudut antara normal garis g dengan sumbu x (arah positif)

Jika garis g dinyatakan oleh persamaan :

$g \equiv ax + by + c = 0$

maka terdapat hubungan :

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{-p}{c} = \lambda$$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \lambda a, \sin \alpha = \lambda b, -p = \lambda c$

maka $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$\Leftrightarrow \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 = 1$

$\Leftrightarrow \lambda^2(a^2 + b^2) = 1$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

maka $\cos \alpha = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \alpha = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ dan $-p = \lambda c$

$$\Leftrightarrow p = -\lambda c$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

Contoh :

Tentukan jarak titik pusat salib sumbu 0 ke garis $g \equiv 2x - y - 3 = 0$

Jawab :

Jarak dari O ke g adalah $p = \dfrac{3}{\pm\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\pm\sqrt{5}} = \left|\pm \dfrac{3}{5}\sqrt{5}\right|$

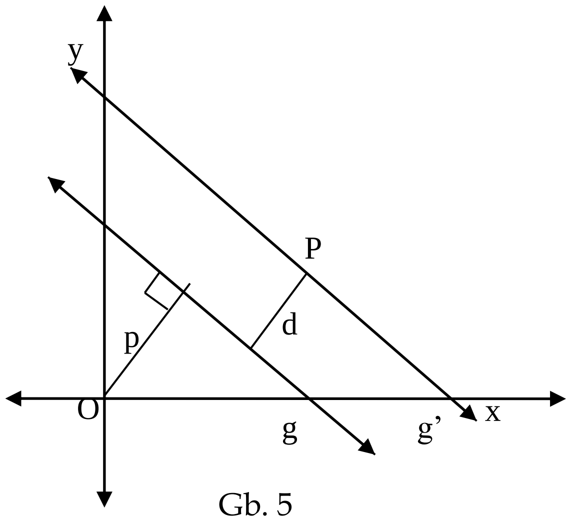
I. Jarak Titik dan Garis

Perhatikan Gb. 5

Untuk menentukan jarak titik P ke garis $g \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ dilakukan dengan cara berikut :

Melalui titik P dibuat garis g' sejajar g.

Misal jarak P ke g = d, maka jarak titik O ke g' = p + d dan sudut antara normal g' dengan sumbu x = sudut antara normal g dengan sumbu x = α



Gb. 5

Jadi persamaan garis g adalah:

$$g \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - (p + d) = 0$$

karena titik P terletak pada g, maka

$$x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha - p - d = 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad d = x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha - p}$$

Jika garis g dinyatakan dengan persamaan :

$g \equiv ax + by + c = 0$, maka jarak titik P ke garis g adalah :

$$d = x_p \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + y_p \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d = \frac{ax_p}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by_p}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d = \left| \frac{ax_p + by_p + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

Contoh :
Dketahui: titik A(5,1), B(3,-5), dan C(2,2) membentuk ΔABC.
Tentukan panjang garis tinggi dari titik A
Jawab: Persamaan sisi $\overleftrightarrow{BC}$ adalah :

$$\overleftrightarrow{BC} : \frac{y - y_c}{y_b - y_c} = \frac{x - x_c}{x_b - x_c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{BC} : \frac{y-2}{-5-2} = \frac{x-2}{3-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{BC} : \frac{y-2}{-7} = \frac{x-2}{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{BC} : y - 2 = -7(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{BC} : y - 2 = -7x + 14$$

$$\Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{BC} : 7x + y - 16 = 0$$

Panjang garis tinggi dari titik A adalah jarak dari titik A ke $\overleftrightarrow{BC}$ misal sama dengan d. Maka

$$d = \left| \frac{7x_A + y_A - 16}{\pm\sqrt{7^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{7.5 + 1 - 16}{\pm\sqrt{50}} \right| = \left| \frac{20}{\pm\sqrt{50}} \right| = \frac{2}{5}\sqrt{50}$$

SOAL:

1. Diketahui: titik A(5,1), B(3,-5), dan C(2,2) yang membentuk ΔABC.
   Tentukan: a. Jarak titik O ke sisi-sisi ΔABC
   b. Luas ΔABC
2. Diketahui: $g \equiv 2x - y + 3 = 0$
   $k \equiv x + 3y - 2 = 0$
   Tentukan: Persamaan garis bagi sudut antara g dan k

J. Berkas Garis Lurus

Diketahui garis g_1 dan g_2 dengan persamaan :

$g_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$
$g_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

dibentuk $g_1 + \lambda\, g_2 = 0$ dengan $\lambda \in R$

$\Leftrightarrow \quad a_1 x + b_1 y + c_1 + \lambda (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (a_1 + \lambda a_2) x + (b_1 + \lambda b_2) y + c_1 + \lambda c_2 = 0$ adalah persamaan garis, yang memuat λ

Berarti persamaan itu menyatakan garis-garis yang tak hingga banyak. Karena itu persamaan tersebut dinamakan "Berkas Garis "

Tinjauan:

a. Untuk setiap nilai λ didapat satu persamaan garis yang merupakan anggota berkas
b. Garis-garis g_1 dan g_2 disebut anggota dasar
c. Berkas garis yang disusun oleh setiap dua anggotanya, ekivalen dengan berkas garis semula. (selidikilah)
d. Jika anggota dasar g_1 dan g_2 berpotongan di titik P, maka semua anggota berkas tentu melalui titik P tersebut. (selidikilah)
e. Jika anggota dasar g_1 dan g_2 saling sejajar, maka semua anggota berkas saling sejajar. (selidikilah)

Contoh :

Diketahui: $g_1 \equiv 2x + 3y - 4 = 0$

$g_2 \equiv x - y + 1 = 0$

T (5,2)

Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong g_1 dan g_2 dan melalui titik T

Jawab:

Persamaan garis yang melalui titik potong g_1 dan g_2 adalah berkas garis :

$g_1 + \lambda g_2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 3y - 4 + \lambda (x - y + 1) = 0$

Jika garis itu melalui T, maka berlakulah :

$$2x_T + 3y_T - 4 + \lambda\,(x_T - y_T + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2.5 + 3.2 - 4 + \lambda\,(5 - 2 + 1\,) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 10 + 6 - 4 + \lambda.4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\lambda = -12$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -3$$

Jadi persamaan garis yang ditanyakan adalah :

$$2x + 3y - 4 - 3(x - y + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x + 3y - 4 - 3x + 3y - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -x + 6y - 7 = 0$$

SOAL:

Segitiga ABC dibentuk oleh tiga garis

$l \equiv 2x - y = 0$, $g \equiv 5x + 3y - 15 = 0$ dan $k \equiv x + 5y - 1 = 0$

A = titik potong *l* dan g

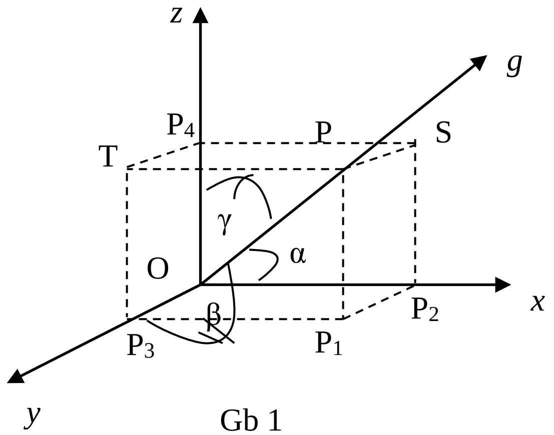
B = titik potong g dan *k*

C = titik potong *l* dan *k*

1. Carilah persamaan garis tinggi dari titik A
2. Tentukan tinggi segitiga ABC dengan alas $\overline{AB}$
3. Tentukan luas segitiga ABC

BAB III
GARIS DAN BIDANG DI R^3

A. Sudut Arah Dan Bilangan Arah di R^3



Gb 1

Perhatikan Gb. 1

Garis g membentuk sudut α dengan sumbu x, sudut β dengan sumbu y, sudut γ dengan sumbu z, maka sudut arah garis g ditulis dengan lambang [α, β, γ].

Ambil titik P pada garis g.

P_1 = proyeksi P pada xoy

P_2 = proyeksi P_1 pada sumbu x

P_3 = proyeksi P_1 pada sumbu y

S = proyeksi P pada xoz

P_4 = proyeksi S pada sumbu z

T = proyeksi P pada yoz

Pada ΔOP_2P, siku-siku di P_2 (selidikilah)

maka $OP_2 = OP \cos \alpha$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{OP_2}{OP} = \frac{x_p}{OP}$$

Pada ΔOP_3P, siku-siku di P_3 (selidikilah)

maka $OP_3 = OP \cos \beta$

$\Leftrightarrow$ $P_1P_2 = OP \cos\beta$

$\Leftrightarrow$ $\cos\beta = \dfrac{P_1P_2}{OP} = \dfrac{y_p}{OP}$

Pada ΔOP_4P, siku-siku di P_4 (selidikilah)

maka $OP_4 = OP \cos\gamma$

$\Leftrightarrow$ $PP_1 = OP \cos\gamma$

$\Leftrightarrow$ $\cos\gamma = \dfrac{PP_1}{OP} = \dfrac{z_p}{OP}$

Dibentuk $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = (\dfrac{x_p}{OP})^2 + (\dfrac{y_p}{OP})^2 + (\dfrac{z_p}{OP})^2 = \dfrac{(OP)^2}{(OP)^2} = 1$

Bilangan arah garis lurus adalah bilangan yang sebanding dengan cosinus sudut arah garis itu.

Jika bilangan arah garis g ditulis dengan lambang [a, b, c], maka

$a : b : c = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$

Misal $\cos\alpha = \lambda a$, maka $\cos\beta = \lambda b$ dan $\cos\gamma = \lambda c$

Dari $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\leftrightarrow$ $\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2 = 1$

$\leftrightarrow$ $\lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$

$\leftrightarrow$ $\lambda^2 = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$

$\leftrightarrow$ $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ Jadi

$\leftrightarrow$

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
$\cos\beta = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
$\cos\gamma = \dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Jika bilangan arah garis k = [1,2,3]. Hitunglah sudut-sudut arah garis k
Jawab: Misal sudut arah garis k = [α, β, γ] sedangkan bilangan arah garis k = [1,2,3]

$$\text{Jadi } \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{14}} = \pm\frac{1}{14}\sqrt{14}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\pm\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{2}{\pm\sqrt{14}} = \pm\frac{1}{7}\sqrt{14}$$

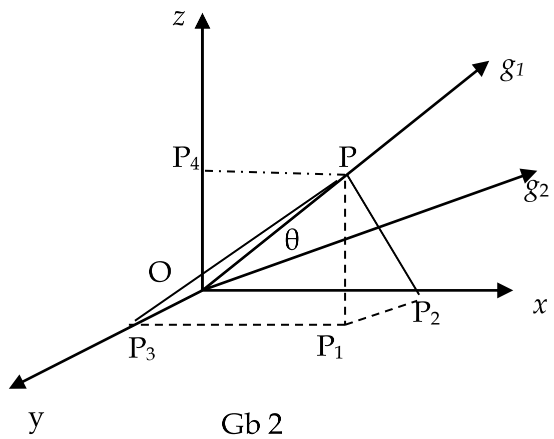
$$\cos\gamma = \frac{3}{\pm\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{3}{\pm\sqrt{14}} = \pm\frac{3}{14}\sqrt{14}$$

Jadi
sudut arah garis k

$$= [\arccos \pm\frac{1}{14}\sqrt{14}, \ \arccos\pm\frac{1}{7}\sqrt{14}, \ \arccos\pm\frac{3}{14}\sqrt{14}\ ]$$

B. Sudut Antara Dua Garis di R^3

Jika sudut-sudut arah dua garis telah disebutkan maka kita dapat menentukan sudut antara dua garis tersebut.
Perhatikan Gb 2



Gb 2

Sudut arah garis g_1 = [α_1, β_1, γ_1]
Sudut arah garis g_2 = [α_2, β_2, γ_2]
Maka sudut antara g_1 dan g_2 dihitung sebagai berikut :

Misal sudut antara g_1 dan g_2 adalah θ

Ambil sebarang titik P pada g_1

P_1 = proyeksi P pada *xoy*

P_2 = proyeksi P_1 pada sumbu *x*

Garis patah OP_2P_1P jika diproyeksikan pada garis g_2 maka proyeksi itu sama dengan proyeksi ruas garis OP pada garis g_2 (selidikilah)

Sedangkan proyeksi garis patah OP_2P_1P pada garis g_2 adalah :

$$
\begin{aligned}
& OP_2 \cos \alpha_2 + OP_3 \cos \beta_2 + OP_4 \cos \gamma_2 \\
= \;& OP_2 \cos \alpha_2 + P_1P_2 \cos \beta_2 + PP_1 \cos \gamma_2 \\
= \;& x_P \cos \alpha_2 + y_P \cos \beta_2 + z_P \cos \gamma_2 \\
= \;& OP \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + OP \cos \beta_1 \cos \beta_2 + OP \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \\
= \;& OP (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)
\end{aligned}
$$

Dan proyeksi ruas garis OP pada garis g_2 adalah OP cos θ

Jadi $OP \cos \theta = OP (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)$

$$\boxed{\mathbf{Cos\ \theta = (Cos\ \alpha_1\ Cos\ \alpha_2 + Cos\ \beta_1\ Cos\ \beta_2 + Cos\ \gamma_1\ Cos\ \gamma_2)}}$$

Jika bilangan arah garis $g_1 = [a_1, b_1, c_1]$

dan bilangan arah garis $g_2 = [a_2, b_2, c_2]$, maka

$$Cos\theta = \frac{a_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\frac{a_2}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} + \frac{b_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\frac{b_2}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$+ \frac{c_1}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\frac{c_2}{\pm\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

Kemungkinan:

1. Jika g_1 tegak lurus g_2, maka $\theta = 90^0$ atau $\cos\theta = 0$, jadi

$$0 = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \text{ atau}$$

$$\boxed{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$$

2. Jika g_1 sejajar g_2, maka $\alpha_1 = \alpha_2$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{a_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$\beta_1 = \beta_2$ $\quad \Leftrightarrow \cos\beta_1 = \cos\beta_2$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{b_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$\gamma_1 = \gamma_2$ $\quad \Leftrightarrow \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{c_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Jadi $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Atau

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

Soal:

1. Bilangan arah garis *l* = [1, 3, 2] dan bilangan arah garis *k* = [2, 1, 3]
   Hitunglah sudut antara garis *l* dan garis *k*
2. Bilangan arah garis *l* = [2, 1, 4] dan bilangan arah garis *k* = [1, 2, m]
   Jika *l* tegak lurus *k*, hitunglah *m*
3. Bilangan arah garis g_1 = [1,3,4] dan bilangan arah
   garis g_2 = [2, 6, m]. Hitunglah *m* jika garis g_1 sejajar garis g_2

C. Bidang Datar di R^3

Persamaan linier dalam 3 variabel x, y, dan z yang bentuk umumnya adalah Ax + By + Cz +D = 0, grafiknya pada salib sumbu kartesius merupakan bidang datar.

Untuk membuktikannya dilakukan cara berikut:

Tentukan 2 titik sebarang yang terletak pada grafik itu. Kemudian kita tetapkan sebuah titik yang terletak diantara 2 titik tersebut. Jika titik ketiga ini juga terletak pada grafiknya. Maka tentulah grafik itu merupakan bidang datar.

Misal V ≡ Ax + By + Cz + D = 0

Jika titik M dan N terletak pada V, maka

$Ax_M + By_M + Cz_m + D = 0$ .... (1)

$Ax_N + By_N + Cz_N + D = 0$ .... (2)

Jika titik T terletak diantara titik-titik M dan N, dan TM : TN = λ : 1

$$x_T = \frac{\lambda x_N + x_M}{\lambda + 1}, \qquad y_T = \frac{\lambda y_N + y_M}{\lambda + 1}, \qquad \text{dan } z_T = \frac{\lambda z_N + z_M}{\lambda + 1}$$

Diselidiki posisi titik T terhadap V :

$Ax_T + By_T + Cz_T + D$

$$= \frac{A(\lambda x_N + x_M) + B(\lambda(_N + y_M) + C(\lambda(_N + z_M) + D(\lambda + 1)}{\lambda + 1}$$

$$= \frac{\lambda(Ax_N + By_N + Cz_N + D) + (Ax_M + By_M + Cz_M + D)}{\lambda + 1}$$

Menurut (1) dan (2) didapat: $\frac{\lambda . 0 + 0}{\lambda + 1} = 0$

Berarti koordinat titik T memenuhi persamaan V. Jadi titik T terletak pada V. Maka V yang persamaannya adalah persamaan linier dalam variabel x, y, dan z tersebut, grafiknya merupakan bidang datar.

Contoh:

1. Diketahui: $V \equiv 2x - y + 3z - 4 = 0$
   Tentukan titik-titik potong V dengan sumbu koordinat.
2. Diketahui: P(-3, 1, 0), Q(2, 3, 1), R(1, 2, 3)
   Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P, Q, dan R.

Jawab

1. $V \equiv 2x - y + 3z - 4 = 0$
   Misal A = titik potong V dengan sumbu x, maka

   $$\left.\begin{array}{l} 2x_A - y_A + 3z_A - 4 = 0 \\ y_A = 0,\ z_A = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow 2x_A - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow x_A = 2 \end{array}$$

   Jadi titik potong V dengan sumbu x adalah A (2, 0, 0)

   Misal B = titik potong V dengan sumbu y, maka

   $$\left.\begin{array}{l} 2x_B - y_B + 3z_B - 4 = 0 \\ x_B = 0,\ z_B = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow -y_B - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow y_B = -4 \end{array}$$

   Jadi titik potong V dengan sumbu y adalah B (0, -4, 0)

Misal C = titik potong V dengan sumbu z, maka

$$\left.\begin{array}{l} 2x_C - y_C + 3z_C - 4 = 0 \\ x_C = 0,\ y_C = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow 3z_C - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow z_C = \dfrac{4}{3} \end{array}$$

Jadi titik potong V dengan sumbu *z* adalah C $(0, 0, \frac{4}{3})$

2. Misal $W \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ adalah bidang yang melalui titik P, Q, dan R maka

$Ax_P + By_P + Cz_P + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3A + B + D = 0$ ………………. (1)

$Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2A + 3B + C + D = 0$ ……….. (2)

$Ax_R + By_R + Cz_R + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + 2B + 3C + D = 0$ ……….. (3)

Dari persamaan (1), (2) dan (3):

Persamaan (2) dikali 3 $\rightarrow$ $6A + 9B + 3C + 3D = 0$

Persamaan (3) $\rightarrow$ $A + 2B + 3C + D = 0$ $\quad -$

$5A + 7B + 2D = 0$ ..…………………… .. (4)

Persamaan (4) $\quad 5A + 7B + 2D = 0$

Persamaan (1) dikali 2 $\rightarrow$ $-6A + 2B + 2D = 0$ $\quad -$

$11A + 5B = 0$

$$\Leftrightarrow \quad A = -\frac{5}{11}B$$

$$\rightarrow -3.\ -\frac{5}{11}B + B + D = 0$$

$$\frac{15}{11}B + B + D = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad D = -\frac{26}{11}B$$

$$\rightarrow 2.-\frac{5}{11}B + 3B + C + (-\frac{26}{11})B = 0$$

$$-\frac{10}{11}B + 3B + C + (-\frac{26}{11})B = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad C = \frac{3}{11}B$$

Jadi $\quad W \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$\Leftrightarrow \quad W \equiv -\frac{5}{11}Bx + By + \frac{3}{11}Bz + (-\frac{26}{11})B = 0$

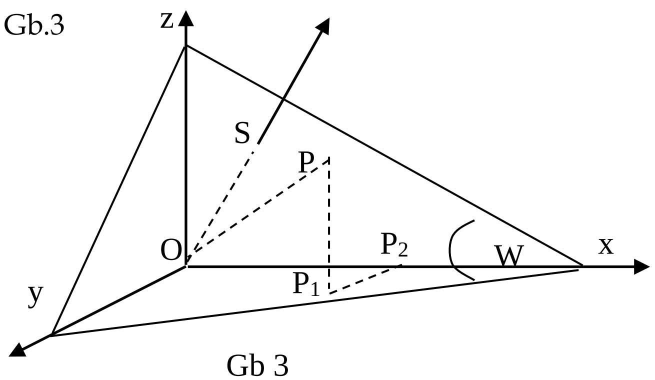
$\Leftrightarrow \quad W \equiv 5x - 11y - 3z + 26 = 0$

Soal:

1. Tentukan karakteristik dari bidang yang persamaannya adalah :
   a. $V_1 \equiv 2x - y + 5z = 0$
   b. $V_2 \equiv 3x + 2y - 3 = 0$
   c. $V_3 \equiv x - 2z = 0$
   d. $V_4 \equiv 2x - 5 = 0$
2. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik-titik P(1, 2, -3), Q(3, 1, 4) dan pusat salib sumbu O.
3. Tentukan persamaan bidang yang memotong sumbu-sumbu koordinat di titik P(3, 0, 0), Q(0, 4, 0) dan R(0, 0, 2)
4. Diketahui: $W \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$
   $V \equiv x + y - 2z + 3 = 0$
   Tentukan koordinat titik sekutu W dan V yang berabsis 3

D. Persamaan Bidang Dalam Bentuk Normal (Persamaan Normal Hess)

Perhatikan Gb.3



Gb 3

Pada bidang W, titik S pada . Garis $\overleftrightarrow{OS}$ tegak lurus bidang W. Sudut arah $\overleftrightarrow{OS}$ = [α, β, γ]. Panjang $\overline{OS}$ = p

Dari pernyataan tersebut maka bidang w tertentu oleh besaran-besaran α,β,γ dan p.

Berarti persamaan bidang W dapat dinyatakan oleh besaran-besaran tersebut.

Untuk memperoleh persamaan bidang W dilakukan cara berikut :

Ambil sebarang titik P yang terletak pada bidang W,

P_1 = proyeksi P pada *xoy*

P_2 = proyeksi P_1 pada sumbu *x*

maka proyeksi garis patah OP_2P_1P pada OS = proyeksi OP pada OS (selidikilah)

Jadi $OP_2 \cos\alpha + P_1P_2 \cos\beta + PP_1 \cos\gamma = OS = p$

$\Leftrightarrow \quad x_P \cos\alpha + y_P \cos\beta + z_p \cos\gamma = p$

$\Leftrightarrow \quad x_P \cos\alpha + y_P \cos\beta + z_p \cos\gamma - p = 0$

Jika koordinat titik P dijalankan , terdapatlah persamaan bidang W tersebut

$$\boxed{W \equiv x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}$$

adalah persamaan bidang W dalam bentuk normal

p = jarak pusat salib sumbu O ke bidang W

[α, β, γ] = sudut arah garis normal pada bidang W

Jika bidang W dinyatakan oleh persamaan

$W \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, maka terdapatlah hubungan

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{-p}{D}$$

misal perbandinan tersebut bernilai λ maka

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \lambda A \\ \cos\beta &= \lambda B \\ \cos\gamma &= \lambda C \\ -p &= \lambda D \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2) \\ 1 &= \lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2) \\ \lambda &= \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Karena $p = -\lambda D$

$$p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$, adalah jarak pusat salib sumbu O ke bidang W

Sedangkan sudut arah garis normal bidang W dihitung dari

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned}}$$

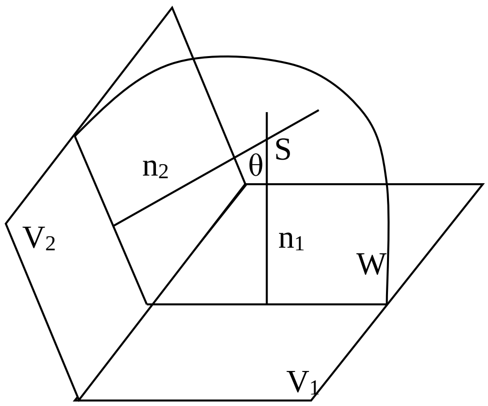
Definisi: Yang dimaksud dengan **sudut arah sebuah bidang**, adalah sudut arah garis normal bidang tersebut. Jadi sudut arah bidang w adalah [α, β, γ]

E. Sudut Antara Dua Bidang

Definisi :

Sudut antara dua bidang adalah sudut antara garis normal bidang yang satu dan garis normal bidang yang lain.

Perhatikan Gb. 4



Gb 4

Bidang-bidang V_1 dan V_2 berpotongan pada garis potongnya (V_1, V_2)
Bidang W memotong tegak lurus bidang-bidang V_1 dan V_2
Garis n_1 terletak pada W, dan memotong tegak lurus (V_1, W)
Garis n_2 terletak pada W, dan memotong tegak lurus (V_2, W)
n_1 dan n_2 berpotongan di titik S dan membentuk sudut θ
Sudut antara V_1 dan V_2 adalah sudut yang dibentuk oleh (V_1, W) dan (V_2, W) atau pelurusnya sudut tersebut yaitu sudut yang dibentuk oleh n_1 dan n_2 (θ)
Sedangkan n_1 adalah garis normal bidang V_1 dan n_2 adalah garis normal bidang V_2 .
Jadi sudut antara V_1 dan V_2 adalah sudut antara garis normal V_1 dan garis normal V_2.
Jika persamaan bidang-bidang V_1 dan V_2 adalah
$V_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + \cos \gamma_1 - p_1 = 0$
$V_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + \cos \gamma_2 - p_2 = 0$
maka sudut-sudut arah garis normal V_1 adalah $[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$ dan sudut-sudut arah garis normal V_2 adalah $[\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]$
Misal sudut antara V_1 dan V_2 adalah θ, maka

$$\boxed{\cos \theta = \cos \alpha_1 . \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 . \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 . \cos \gamma_2}$$

Bilangan arah bidang datar adalah bilangan arah garis normal bidang itu Misal bidang $V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ sudut arahnya adalah $[\alpha, \beta, \gamma]$, maka :

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Jika bilangan arah V adalah [A, B, C], maka terdapat hubungan
$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = A : B : C$

Jika bidang-bidang V_1 dan V_2 masing-masing dinyatakan dalam persamaan :
$V_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$V_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
maka sudut antara V_1 dan V_2 adalah :
cos θ =

$$\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}+\frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}+\frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Kemungkinan:

1) Jika V_1 tegak lurus V_2, maka $\theta = 90^0$ atau $\cos\theta = \cos 90^0 = 0$

$$\text{Jadi } 0 = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

atau

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0}$$

2) Jika V_1 sejajar V_2, maka

$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\beta_1 = \beta_2 \Leftrightarrow \cos\beta_1 = \cos\beta_2$

$$\Leftrightarrow \frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B_1}{B_2} = \frac{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$\gamma_1 = \gamma_2 \Leftrightarrow \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2$

$$\Leftrightarrow \frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Jadi $\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

F. Persamaan Bidang Melalui Sebuah Titik dan Bilangan Arah Tertentu

Bidang dapat ditentukan persamaannya, jika diketahui bilangan arahnya dan melalui sebuah titik tertentu.

Bidang V bilangan arahnya adalah [A, B, C] maka persamaannya

$V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

Bidang V melalui titik P, maka didapatlah

$Ax_p + By_p + Cz_p + D = 0 \Leftrightarrow D = -Ax_p - By_p - Cz_p$

Jadi persamaan bidang V adalah

$V \equiv Ax + By + Cz + (-Ax_p - By_p - Cz_p) = 0$ atau

$$\boxed{V \equiv A(x - x_p) + B(y - y_p) + C(z - z_p) = 0}$$

V adalah persamaan bidang yang melalui titik P dengan bilangan arahnya [A, B,C]

Contoh:

1. Diketahui : $V_1 \equiv 3x - 6y - 2z = 15$

$V_2 \equiv 2x + y - 2z = 5$

Tentukan besar sudut antara V_1 dan V_2

2. Diketahui **:** $W \equiv 2x + 3y + 5z - 10 = 0$

P (1,2,-1)

Tentukan: a. Persamaan bidang yang melalui titik P dan sejajar bidang W

b. Persamaan bidang yang melalui titik P dan titik pusat salib sumbu O dan tegak lurus bidang W

Jawab:

1) $V_1 \equiv 3x - 6y - 2z = 15$

$V_2 \equiv 2x + y - 2z = 5$

Misal sudut antara V_1 dan V_2 adalah θ, maka

$$\cos\theta = \frac{3.2 + (-6).1 + (-2).(-2)}{\pm\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{6 - 6 + 4}{\pm\sqrt{49}\sqrt{9}}$$

$$= \frac{4}{\pm 21}$$

$= 0.190476$

$\Leftrightarrow \theta = \arccos 0.190476$

2. $W \equiv 2x + 3y + 5z - 10 = 0$

P (1,2,-1)

a. Misal bidang U dengan bilangan arah [A,B,C] dan melalui titik P, maka persamaan bidang U adalah

$U \equiv A(x - x_p) + B(y - y_p) + C(z - z_p) = 0$

$\Leftrightarrow$ $U \equiv A(x - 1) + B(y - 2) + C(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $U \equiv Ax + By + Cz - A - 2B + C = 0$

karena U sejajar W, maka

$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5}$, maka nilai perbandingan ini = λ maka $A = 2\lambda$, $B = 3\lambda$, dan $C = 5\lambda$

Jadi persamaan U adalah $U \equiv 2\lambda x + 3\lambda y + 5\lambda z - 2\lambda - 6\lambda + 5\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \quad U \equiv 2\lambda x + 3\lambda y + 5\lambda z - 3\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \quad U \equiv 2x + 3y + 5z - 3 = 0$

b. Misal bidang V dengan bilangan arah [A,B,C] dan melalui titik P, maka persamaan bidang V adalah

c. $V \equiv A(x - x_p) + B(y - y_p) + C(z - z_p) = 0$

$\Leftrightarrow \quad V \equiv Ax + By + Cz - Ax_p - By_p - Cz_p = 0$

$\Leftrightarrow \quad V \equiv Ax + By + Cz - A.1 - B.2 - C.(-1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad V \equiv Ax + By + Cz - A - 2B + C = 0$

juga melalui titik pusat salib sumbu O, maka

$V \equiv Ax_0 + By_0 + Cz_0 - A - 2B + C = 0$

$\Leftrightarrow \; -A - 2B + C = 0$……………………(1)

tegak lurus W, maka $2A + 3B + 5C = 0$……………………(2)

persamaaan (1) dikali 2 $\quad -2A - 4B + 2C = 0$

Persamaan (2) $\quad 2A + 3B + 5C = 0 \quad +$

$-B + 7C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = 7C$

Substitusi ke persaamaan (1)

$-A - 2.7C + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = -13C$

Jadi persamaan bidang V adalah

$V \equiv -13Cx + 7Cy + Cz + 13C - 2.7C + C = 0$

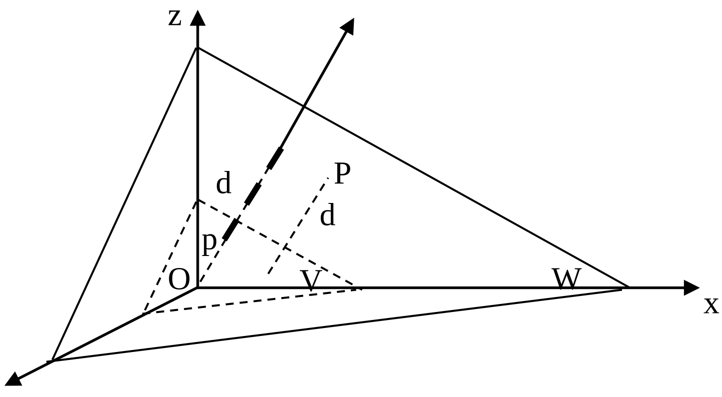
$\Leftrightarrow \; V \equiv 13Cx + 7Cy + Cz = 0$

$\Leftrightarrow \; V \equiv 13x + 7y + z = 0$

Soal:

1. Tentukan besar sudut antara bidang-bidang $W_1 \equiv x + 2y + 2z = 5$ dan $W_2 \equiv 3x + 5y + 2z = 8$
2. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P (-1,3,2) dan sejajar bidang $U \equiv 3x + 5y + 2z - 8 = 0$
3. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik P (-1,3,2) dan tegak lurus bidang-bidang $W_1 \equiv x + 2y + 2z = 5$ dan $W_2 \equiv 3x + 5y + 2z = 8$

G. Jarak Titik Ke Bidang Datar



Gb 5

Jika diketahui sebuah bidang dan sebuah titik, maka jarak titik ke bidang tersebut dihitung sebagai berikut:
Bidang V dinyatakan oleh persamaan

$$V \equiv x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

Misal jarak titik P ke bidang V adalah d
Buatlah bidang W yang melalui P dan sejajar V, maka jarak titik pusat salib sumbu O ke W = p + d
Sudut arah bidang W = sudut arah bidang V = [α, β, γ]
Jadi persamaan bidang W adalah

$$W \equiv x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - (p + d) = 0$$

Titik P terletak pada bidang W, maka :

$$x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma - (p + d) = 0$$

$$\Leftrightarrow d = x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma - p$$

Jadi jarak titik P terhadap bidang $V \equiv x_P \cos \alpha + y_P \cos \beta + z_P \cos \gamma - p = 0$
adalah :

$$\boxed{d = \left| x_P \cos \alpha + y_p \cos \beta + z_P \cos \gamma - p \right|}$$

Jika bidang V dinyatakan oleh persamaan

$V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, maka jarak titik P terhadap bidang V adalah

$$d = \left| x_P \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + y_p \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + z_P \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} - \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{Ax_P + By_p + Cz_P + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right|$$

Contoh:

1) Tentukan jarak titik P (1,2,3) ke bidang W $\equiv x - y + 2z - 1 = 0$
2) Tentukan jarak antara bidang $V_1 \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$ dan bidang $V_2 \equiv 2x - 4y + 6z + 5 = 0$

Jawab:

1) $W \equiv x - y + 2z - 1 = 0$

   Jarak titik P (1,2,3) ke W adalah

   $$d = \left| \frac{x_P - y_p + 2z_P - 1}{\pm\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{1 - 2 + 2.3 - 1}{\pm\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{4}{\pm\sqrt{6}} \right| = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

2) $V_1 \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$

   $V_2 \equiv 2x - 4y + 6z + 5 = 0$

   Perbandingan koefisien x pada V_1 dan V_2 = $\frac{1}{2}$

   Perbandingan koefisien y pada V_1 dan V_2 = $\frac{-2}{-4}$

   Perbandingan koefisien z pada V_1 dan V_2 = $\frac{3}{6}$

   sedangkan $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6}$

   Jadi V_1 sejajar V_2

   Jarak bidang V_1 ke bidang V_2 dicari sebagai berikut :

   Ambil titik A $(0,0, z_A)$ pada bidang V_1, maka

   $x_A - 2y_A + 3z_A - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3z_A = 1 \Leftrightarrow z_A = \frac{1}{3}$

Jarak bidang V_1 ke bidang V_2 = Jarak A $(0,0,\frac{1}{3})$ ke bidang $V_2 = d$

$$d = \left|\frac{2x_A - 4y_A + 6z_A + 5}{\pm\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2}}\right| = \left|\frac{2+5}{\pm\sqrt{56}}\right| = \left|\frac{7}{\pm 2\sqrt{14}}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{14}$$

Soal:

1. Tentukan jarak titik A (-1,2,3) ke bidang $V \equiv 2x + y + 2z - 1 = 0$
2. Tentukan jarak bidang $V_1 \equiv x - 2y + z - 1 = 0$ dan bidang $V_2 \equiv 3x - 6y + 3z + 5 = 0$
3. Tentukan koordinat titik P pada sumbu x yang berjarak 5 ke bidang $W \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$.
4. Diketahui $V \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$ dan $W \equiv x + 2y + z - 3 = 0$
   Tentukan Persamaan bidang bagi sudut antara V dan W (bidang bisektris)

H. Berkas Bidang Datar

Jika diketahui persamaan 2 bidang V_1 dan V_2,

$V_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$V_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

maka persamaan $V \equiv V_1 + \lambda V_2 = 0$, $\lambda \in$ Bilangan Real

atau $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0$

adalah persamaan bidang datar juga.

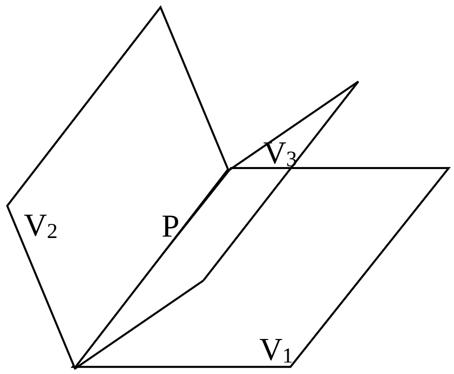
Karena persamaan tersebut memuat $\lambda \in R$, maka persamaan itu menyatakan bidang datar yang tak higga banyak dan disebut Berkas Bidang

Kemungkinan:

1. Untuk sebuah nilai λ didapat satu persamaan bidang, yang merupakan anggota berkas sedangkan V_1 dan V_2 disebut anggota dasar
2. Berkas bidang yang disusun oleh setiap 2 anggotanya adalah ekivalen dengan berkas bidang semula (selidikilah)

3. Jika anggota dasarnya V_1 dan V_2 berpotongan pada garis potongnya (V_1, V_2), maka semua anggota berkas tentu melalui garis potong (V_1, V_2) tersebut.

Bukti :
Perhatikan Gb 6



Ambil sebarang titik P pada (V_1, V_2), berarti titik P terletak pada
$V_1 \rightarrow A_1x_P + B_1y_P + C_1z_P + D_1 = 0$ ....(1)
dan titik P terletak pada
$V_2 \rightarrow A_2x_P + B_2y_P + C_2z_P + D_2 = 0$ ....(2)
Diselidiki posisi titik P terhadap berkas bidang $V_1 + \lambda\, V_2 = 0$ atau
$A_1x_P + B_1y_P + C_1z_P + D_1 + \lambda\,(A_2x_P + B_2y_P + C_2z_P + D_2) = 0$
menurut (1) dan (2) $\rightarrow 0 + \lambda\, 0 = 0$
(persamaan ini bernilai benar)
Maka koordinat titik P memenuhi persamaan berkas $V_1 + \lambda\, V_2 = 0$
Sedangkan titik P terletak pada (V_1, V_2)
Berarti setiap anggota berkas tentu melalui (V_1, V_2)
Jika anggota dasarnya V_1 dan V_2 sejajar, maka semua anggota berkas saling sejajar (selidikilah)

Contoh:

1. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik A (3,2,1) dan garis potong bidang $V_1 \equiv 2x + 3y + z + 12 = 0$ dan $V_2 \equiv x - 4y + z - 10 = 0$
2. Tentukan persamaan bidang yang melalui garis potong
   $V_1 \equiv x - 3y + z - 7 = 0$ dan $V_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$ dan tegak lurus bidang $V_3 \equiv x + 2y + 3z + 7 = 0$

Jawab:

1. Persamaan bidang yang melalui garis potong V_1 dan V_2 adalah
   $W \equiv V_1 + \lambda V_2 = 0 \Leftrightarrow W \equiv 2x + 3y + z + 12 + \lambda(x - 4y + z - 10) = 0$
   Bidang W melalui titik A, maka
   $2x_A + 3y_A + z_A + 12 + \lambda(x_A - 4y_A + z_A - 10) = 0$
   $2.3 + 3.2 + 1 + 12 + \lambda(3 - 4.2 + 1 - 10) = 0$
   $25 + \lambda.-14 = 0$
   $14\lambda = 25, \lambda = \frac{25}{14}$
   Jadi persamaan bidang W adalah
   $W \equiv 2x + 3y + z + 12 + \frac{25}{14}(x - 4y + z - 10) = 0$
   $W \equiv 28x + 42y + 14z + 168 + 25x - 100y + 25z - 250 = 0$
   $W \equiv 53x - 58y + 39z - 82 = 0$
2. Misal bidang W melalui garis potong V_1 dan V_2 maka
   $W \equiv V_1 + \lambda V_2 = 0$
   $W \equiv x - 3y + z - 7 + \lambda(2x - y + 3z - 5) = 0$
   $W \equiv (1 + 2\lambda)x + (-3 - \lambda)y + (1 + 3\lambda)z - 7 - 5\lambda = 0$
   Bidang W tegak lurus bidang V_3, maka
   $(1 + 2\lambda)1 + (-3 - \lambda)2 + (1 + 3\lambda)3 = 0$
   $1 + 2\lambda - 6 - 2\lambda + 3 + 9\lambda = 0$
   $9\lambda - 2 = 0, \lambda = \frac{2}{9}$
   Jadi persamaan bidang W adalah
   $(1 + 2.\frac{2}{9})x + (-3 - \frac{2}{9})y + (1 + 3.\frac{2}{9})z - 7 - 5.\frac{2}{9} = 0$

   $W \equiv 1\frac{4}{9}x - 3\frac{2}{9}y + 1\frac{2}{3}z - 8\frac{1}{9} = 0$
   $W \equiv 13x - 29y + 15z - 73 = 0$

Soal:

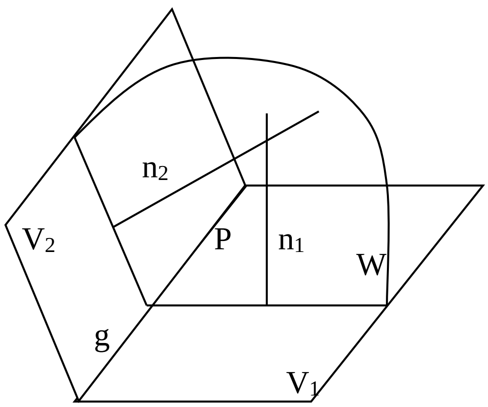
1. Tentukan persamaan bidang yang melalui garis potong bidang-bidang $V_1 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$ dan $V_2 \equiv x + 2y + 3z + 7 = 0$ dan melalui pusat salib sumbu O

2. Diketahui: $V \equiv 2x + 3y + z + 2 = 0$
   $W \equiv x - 3y + 2z - 5 = 0$
   Tentukan persamaan bidang yang melalui garis potong V dan W dan tegak lurus $U \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$
3. Diketahui $U \equiv x + y - 3z + 2 = 0$ dan P (3,1,-2)
   Tentukan Persamaan bidang yang melalui garis potong bidang U dan bidang xoy dan melalui titik P
4. Tentukan persamaan bidang yang melalui garis potong bidang-bidang $V_1 \equiv 2x + 3y + z - 4 = 0$ dan $V_2 \equiv x + y + z + 1 = 0$ dan tegak lurus bidang xoy

I. Persamaan Garis di R^3

Garis lurus pada R^3 dinyatakan oleh 2 bidang datar.

Perhatikan Gb 7



Gb 7

Garis g dinyatakan oleh 2 bidang V_1 dan V_2 yang ditulis dengan lambang

$$g \equiv \begin{cases} V_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ V_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

n_1 = garis normal V_1

n_2 = garis normal V_2

Jika garis g tegak lurus n_1 dan tegak lurus n_2.

Misal bilangan arah g = [a,b,c], maka didapat hubungan :

$aA_1 + bB_1 + cC_1 = 0$ ....(1)

$aA_2 + bB_2 + cC_2 = 0$ ....(2)

menurut (1) dan (2) maka bilangan arah garis g = [a,b,c]
selanjutnya tentukan sebarang titik P pada g berlakulah

$A_1x_P + B_1y_P + C_1z_P + D_1 = 0$ ....(3)

$A_2x_P + B_2y_P + C_2z_P + D_2 = 0$ ....(4)

pada (3) dan (4) dengan mengambil sebarang nilai untuk x_P, y_P atau z_P didapatlah koordinat titik P
Maka persamaan garis g dapat dinyatakan dalam bentuk

$$g \equiv \frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c}$$

Contoh:

1. Tentukanlah bilangan arah garis g yang dinyakan oleh persamaan
$$g \equiv \begin{cases} V_1 \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ V_2 \equiv 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$
2. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik P (3,-1,4) dengan bilangan arah [3,-1,2]

Jawab:

1) $g \equiv \begin{cases} V_1 \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ V_2 \equiv 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$

Misal bilangan arah garis g = [a,b,c]

Berarti g tegak dengan garis normal V_1

maka 1.a + b.-2 + c.3 = 0

a - 2b + 3c = 0.............(1)

dan g tegak dengan garis normal V_2

2.a + b.(-1) + c.1 = 0

2a – b + c = 0 ....(2)

Persamaan (1) dikali 2 $\rightarrow$ 2a - 4b + 6c = 0
Persamaan (2) $\rightarrow$ 2a – b + c = 0 –

- 3b + 5c = 0 , c = $\frac{3}{5}$b

a – 2b + 3. $\frac{3}{5}$b = 0, a – 2b + $\frac{9}{5}$b = 0

$$a = \frac{1}{5}b$$

jadi bilangan arah garis g = [$\frac{1}{5}$b,b, $\frac{3}{5}$b]=[1,5,3]

2) Garis g melalui titik P (3,-1,4) dan bilangan arahnya [3,-1,2], maka persamaan garis g

$$g \equiv \frac{x - x_P}{3} = \frac{y - y_P}{-1} = \frac{z - z_P}{2}$$

$$g \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

Soal:

1. Tentukan Cosinus sudut arah garis g yang persamaannya

$$g \equiv \begin{cases} V_1 \equiv x - 2y + 3z = 1 \\ V_2 \equiv 4x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

2. Diketahui garis g_1 dan g_2 yang persamaannya:

$$g_1 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

$$g_2 \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{2y-3}{8} = \frac{3z+4}{6}$$

Selidikilah kedudukan garis g_1 dan g_2 tersebut

3. Diketahui garis k_1 dan k_2 yang persamaannya

$$k_1 \equiv \begin{cases} W_1 \equiv x - 2y + 3z + 2 = 0 \\ W_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$k_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{4}$$

Tentukan sudut antara garis k_1 dan k_2

BAB IV
TEMPAT KEDUDUKAN

A. Definisi Tempat Kedudukan

Tempat Kedudukan adalah himpunan titik-titik yang mempunyai syarat tertentu. Ada tiga cara untuk mencari persamaan tempat kedudukan yaitu:

1. menjalankan titik
2. Menggunakan parameter
3. Gabungan menjalankan titik dan menggunakan parameter

1. Menjalankan Titik

Langkah: (i) Ambil sebarang titik (x_0, y_0) yang memenuhi persyaratan

(ii) Cari hubungan x_0 dan y_0

(iii) Jalankan (x_0, y_0) artinya x_0 diganti dengan x dan y_0 diganti dengan y

Contoh:

Tentukan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama dari titik P(4, 3) dan Q(2, 1)

Jawab:

(i) Ambil sebarang titik T(x_T, y_T)

(ii) PT = QT

$$\sqrt{(x_T - x_P)^2 + (y_T - y_P)^2} = \sqrt{(x_T - x_Q)^2 + (y_T - y_Q)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_T - 4)^2 + (y_T - 3)^2} = \sqrt{(x_T - 2)^2 + (y_T - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_T - 4)^2 + (y_T - 3)^2 = (x_T - 2)^2 + (y_T - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x_T{}^2 - 8x_T + 16 + y_T{}^2 - 6y_T + 9 - x_T{}^2 + 4x_T - 4 - y_T{}^2 + 2y_T - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x_T - 4y_T + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_T + y_T - 5 = 0$$

(iii) T(x_T, y_T) dijalankan sehingga diperoleh: x + y – 5 = 0

Jadi tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik P dan Q adalah garis dengan persamaan x + y – 5 = 0 (garis tersebut tegak lurus dengan $\overline{PQ}$).

2. Menggunakan Parameter

Langkah: (i) Ambil satu atau lebih parameter (penentu persamaan)

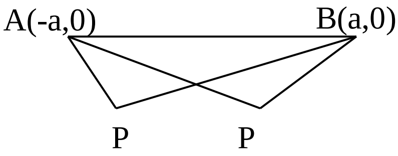
(ii) Cari hubungan variabel misal x, y dan parameter berdasarkan syarat yang sudah diketahui

(iii) Eliminir parameter, sehingga didapat persamaan tempat kedudukan

Contoh:

Tentukan tempat kedudukan titik-titik P sedemikian hingga $m\angle APB = 90^0$ dengan A dan B diketahui

Jawab:



Gb. 1

$\overleftrightarrow{AB}$ dianggap sebagai sumbu x

Misal AB = 2a sehingga A(-a, 0) dan B(a, 0)

(i) $\overline{AP} \equiv y - 0 = m_{AP}(x + a)$

$\Leftrightarrow y = m_{AP}(x + a)$ m_{AP} adalah parameter

$m_{AP} = \frac{y}{(x+a)}$......... (1)

(ii) $\overline{BP} \perp \overline{AP}$ maka $m_{BP} = -\dfrac{1}{m_{AP}}$

$\overline{BP} \equiv y - 0 = -\dfrac{1}{m_{AP}}(x - a)$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{m_{AP}}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow m_{AP} = -\frac{1}{y}(x-a)............(2)$$

Dari persamaaan (1) ke persamaan (2)

$$\frac{y}{(x+a)} = -\frac{1}{y}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (a+x)(a-x)$$

$$\Leftrightarrow y^2 = a^2 - x^2$$

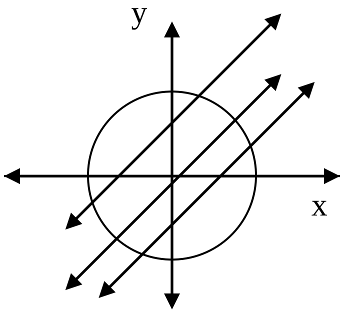
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

Jadi tempat kedudukan titik P sedemikian hingga $m\angle APB = 90^0$ adalah lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = a^2$ (lingkaran dengan pusat (0, 0) dan jari-jari = a)

3. Gabungan menjalankan titik dan menggunakan parameter

Contoh:

Tentukan tempat kedudukan titik tengah–titik tengah tali busur yang sejajar garis $y = ax$, jika diketahui lingkran $x^2 + y^2 = a^2$



Gb. 2

garis-garis yang sejajar $y = ax$ adalah $y = ax + n$, n adalah parameter
Garis $y = ax + n$ memotong lingkaran di 2 titik

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (ax+n)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + a^2x^2 + 2anx + n^2 - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+a^2)x^2 + (2an)x + n^2 - a^2 = 0 \;...(1)$$

misal T(x_T, y_T) merupakan titik tengah tali busur maka T(x_T,y_T) terletak pada $y = ax + n$ artinya $y_T = ax_T + n$ ....(2)

T titik tengah tali busur artinya $x_T = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ....(3)

Perhatikan akar-akar persamaan (1):

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{2an}{1+a^2} \text{ ....(4)}$$

Substitusi persamaan (4) ke persamaan (3)

$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_T = \frac{-\frac{2an}{1+a^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_T = -\frac{an}{1+a^2}$$

$$\Leftrightarrow x_T(1+a^2) = -an$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{x_T(1+a^2)}{-a}$$

Substitusi n ke persamaan (2)

$$y_T = ax_T + n$$

$$= ax_T + \frac{x_T(1+a^2)}{-a}$$

$$= \frac{ax_T(-a) + x_T + a^2x_T}{-a}$$

$$y_T = \frac{x_T}{-a}$$

T(x_T, y_T) dijalankan sehingga diperoleh $y = \frac{x}{-a}$

Jadi tempat kedudukan titik-titik tengah tali busur pada lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$ adalah garis dengan persamaan $y = -\frac{1}{a}x$ (garis yang tegak lurus garis $y = ax$)

SOAL

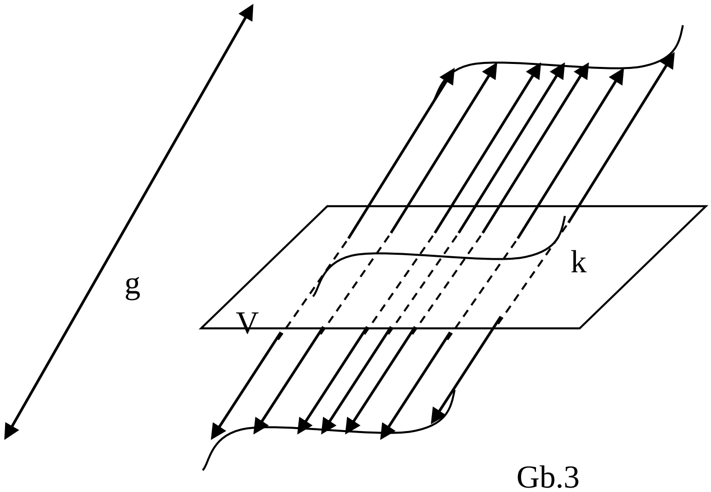
1. Diketahui titik P(-3, 4) dan Q(3, -2). Tentukan tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap P dan Q berbanding 2 : 1
2. $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ merupakan dua jari-jari suatu lingkaran yang saling tegak lurus. Dari sebuah titik P pada lingkaran ditarik garis yang tegak lurus $\overline{OB}$ dan memotong $\overline{OB}$ di C. Titik potong $\overline{OP}$ dan $\overline{AC}$ adalah T. Tentukan tempat kedudukan titik T jika P bergerak sepanjang keliling lingkaran
3. Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ dan titik P(a, b). Tentukan tempat kedudukan titik-titik tengah semua tali busur lingkaran yang melalui P

B. Pengertian Bidang Tabung

Pandang suatu garis lengkung dengan bidang pemuat V dan garis *g* (garis pelukis) tidak sejajar dengan V. Lukis garis-garis melalui titik-titik pada garis lengkung tersebut yang sejajar dengan garis *g*. Garis-garis lurus tersebut membentuk suatu himpunan garis yang merupakan bidang lengkung. Bidang lengkung yang terjadi adalah ***Bidang Tabung***

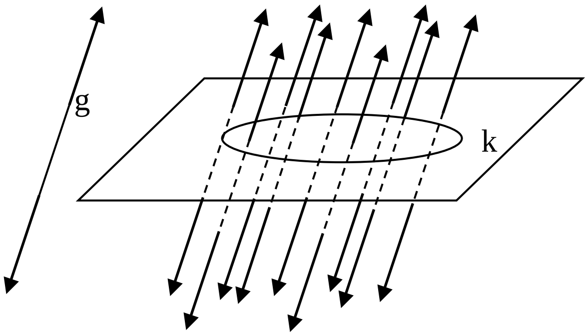
Perhatikan ilustrasi berikut:

Pandang sebuah garis lengkung *k* (garis pedoman) pada bidang V, dan garis *g* dengan bilangan arah [a, b, c] yang tidak sejajar dengan V. Kemudian melalui titik-titik pada *k* dilukis garis-garis yang sejajar dengan *g*. Garis-garis yang dilukis membentuk suatu himpunan garis yang merupakan sebuah bidang lengkung yang disebut Bidang tabung.

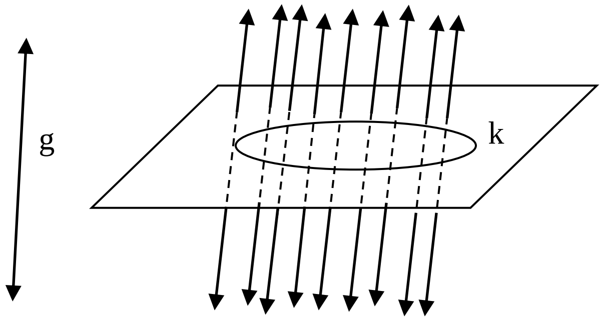


Gb.3

Kemudian jika *k* merupakan sebuah lingkaran dan sebarang garis *g* yang tidak sejajar dengan V. Dengan melukis garis-garis seperti cara di atas maka diperoleh sebuah bidang lengkung, yang disebut bidang tabung lingkaran miring.



Sekarang pandang jika *k* merupakan sebuah lingkaran dan garis *g* tegak lurus terhadap V. Dengan demikian garis-garis seperti di atas, maka diperoleh sebuah bidang lengkung yang disebut bidang tabung lingkaran tegak.



Gb. 4

C. Persamaan Bidang Tabung

Untuk menentukan persamaan bidang tabung dilakukan sebagai berikut: Misalnya

Diketahui persamaan garis lengkung dasar tabung adalah:

$$k \equiv \begin{cases} V \equiv f(x, y, z) = 0 \\ W \equiv g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Dan garis *g* dengan bilangan arah [a, b, c].

Tentukan persamaan tabung tersebut.

Jawab

Ambil sebarang titik T (x_0, y_0, z_0) pada *k*. Ini berarti

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Kemudian persamaan garis pelukis bidang adalah persamaan garis yang melalui titik T (x_0, y_0, z_0) dengan bilangan arah [a, b, c] yaitu:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Persamaaan bidang tabung diperoleh jika titik T dijalankan, ini berarti kita eliminasi x_0, y_0, dan z_0 dari persamaan 1, 2, 3.

Contoh:
Tentukan persamaan bidang tabung yang garis-garis pelukisnya mempunyai bilangan arah [2, -3, 4] dan persamaan kurva dasarnya:

$$k \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ambil sebarang titik $T(x_0, y_0, z_0)$ pada k

Ini berarti
$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$z_0 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Kemudian persamaan garis pelukis tabung adalah persamaan garis yang melalui titik T dengan bilanagan arah [2, -3, 4]

$$\frac{x - x_0}{2} = \frac{y - y_0}{-3} = \frac{z - z_0}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Persamaan bidang tabung diperoleh jika koordinat titik T dijalankan. Ini berarti eliminasi x_0, y_0, dan z_0 dari persamaan 1, 2, 3.
Misalkan

$$\frac{x - x_0}{2} = \frac{y - y_0}{-3} = \frac{z - z_0}{4} = \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Persamaan (*) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{x - x_0}{2} = \lambda. \Leftrightarrow x_0 = x - 2\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dengan cara sama diperoleh

$$y_0 = y + 3\lambda \text{ dan } z_0 = z - 4\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dari persamaan (2), $z_0 = 1$ dan $z_0 = z - 4\lambda$, maka diperoleh:

$$1 = z - 4\lambda$$
$$\lambda = \frac{(z-1)}{4}$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaan (1),
Dari persamaan (1), $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9$, maka diperoleh

$$(x - 2\lambda)^2 + (y + 3\lambda)^2 + (z - 4\lambda)^2 = 9$$

Dengan mensubstitusikan nilai λ diperoleh:

$$\left\{x-\frac{2(z-1)}{4}\right\}^2+\left\{y+\frac{3(z-1)}{4}\right\}^2+\left\{z-\frac{4(z-1)}{4}\right\}^2=9$$

$$(4x-2z+2)^2+(4y+3z-3)^2+16=144$$

$$16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z-130=0$$

Jadi persamaan tabung yang diminta adalah:

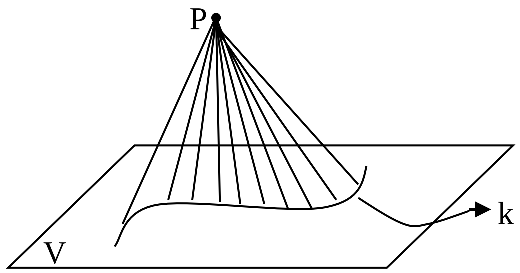
$16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z-130=0$

D. Pengertian Bidang Kerucut

Pandang suatu garis lengkung yang termuat pada bidang V dan dan ada titik P di luar bidang V. Garis-garis yang ditarik melalui P dan titik-titik pada kurva lengkung itu membentuk suatu himpunan garis lurus yang merupakan bidang lengkung. Bidang lengkung yang terjadi disebut bidang kerucut yang selanjutnya disebut kerucut.

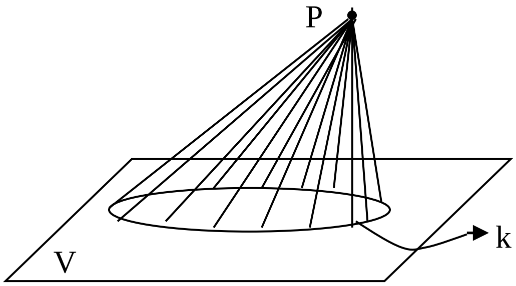
Perhatikan ilustrasi berikut:

Misalkan *k* (garis lengkung dasar) terletak pada bidang V dan titik P diluar bidang V. Kemudian lukis garis-garis melalui titik P dan titik-titik pada *k*. Garis-garis tersebut akan membentuk suatu himpunan yang merupakan sebuah bidang lengkung seperti di bawah ini. Bidang lengkung yang terjadi adalah ***Bidang Kerucut***



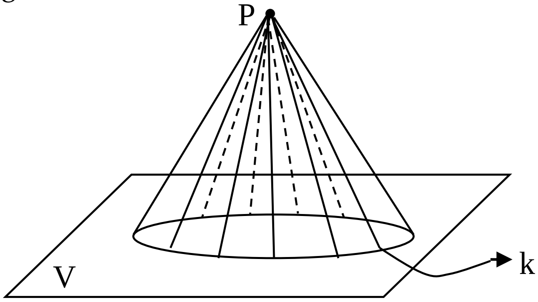
Gb. 5

Kemudian pandang jika *k* merupakan sebuah lingkaran dan P terletak sebarang di luar V. Dengan cara yang sama seperti di atas, maka diperoleh sebuah bidang lengkung. Bidang lengkung yang terjadi disebut Kerucut Lingkaran Miring



Gb. 6

Sekarang pandang jika *k* merupakan sebuah dan proyeksi P terhadap V berimpit dengan pusat lingkaran. Dengan cara yang sama dengan di atas maka diperoleh sebuah bidang lengkung yang disebut kerucut Lingkaran Tegak



Gb. 7

E. Persamaan Bidang Kerucut

Untuk menentukan persamaan bidang kerucut, dilakukan dengan cara sebagai berikut:
Misalkan, diketahui persamaan garis lengkung dasar kerucut adalah:

$$k \equiv \begin{cases} V \equiv f(x, y, z) = 0 \\ W \equiv g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Dan Puncak P(x_1, y_1, z_1)

Tentukanlah persamaan kerucut tersebut

Ambil sebarang titik T (x_0, y_0, z_0) pada garis lengkung *k*. Ini berarti

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Sedangkan persamaan garis pelukis kerucut adalah persamaan garis yang melalui titik T(x_0,y_0,z_0) dan P(x_1, y_1, z_1) yaitu:

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_0 - z_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Persamaaan bidang kerucut diperoleh jika titik T(x_0, y_0, z_0) dijalankan sepanjang kurva *k* artinya kita eliminasi x_0, y_0, dan z_0 dari persamaan 1, 2, 3.

Contoh:

Tentukan persamaan kerucut dengan puncak P(3, -1, -2) dan persamaan garis lengkung dasarnya adalah:

$$S \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Jawab:

Ambil titik T(x_0, y_0, z_0) sebarang pada garis lengkung dasar S. Ini berarti

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x_0 - y_0 + z_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Kemudian persamaan garis pelukisnya adalah persamaan garis yang melalui T(x_0, y_0, z_0) dan P(3, -1, -2) adalah:

$$\frac{x - 3}{x_0 - 3} = \frac{y + 1}{y_0 + 1} = \frac{z + 2}{z_0 + 2}$$

Persamaan bidang kerucut diperoleh jika koordinat titik T dijalankan, artinya kita eliminasi x_0, y_0, z_0 dari persamaan (1), (2), dan (3)

Misalkan $\dfrac{x - 3}{x_0 - 3} = \dfrac{y + 1}{y_0 + 1} = \dfrac{z + 2}{z_0 + 2} = \lambda$

Persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{x-3}{x_0-3}=\lambda \Leftrightarrow x-3=\lambda(x_0-3)$$

$$x_0=\frac{x-3+3\lambda}{\lambda}\text{...........(3)}$$

$$\frac{y+1}{y_0+1}=\lambda \Leftrightarrow y+1=\lambda(y_0+1)$$

$$y_0=\frac{y+1-\lambda}{\lambda}\text{...........(3)}$$

$$\frac{z+2}{z_0+2}=\lambda \Leftrightarrow z+2=\lambda(z_0+2)$$

$$z_0=\frac{z+2-2\lambda}{\lambda}\text{...........(3)}$$

Substitusikan persamaan (3) ke persamaaan (2), maka diperoleh:

$$\frac{x-3+3\lambda}{\lambda}-\frac{y+1-\lambda}{\lambda}+\frac{z+2-2\lambda}{\lambda}=0$$

$$x-y+z-2=-2\lambda$$

$$\lambda=\frac{x-y+z-2}{-2}\text{..................(4)}$$

Kemudian substitusikan persamaan (3) dan persamaan (4) ke persamaan (1)

$$x_0^2+y_0^2-z_0^2=1$$

$$\left(\frac{x-3+3\lambda}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y+1-\lambda}{\lambda}\right)^2-\left(\frac{z+2-2\lambda}{\lambda}\right)^2=1$$

$$\left\{x-3+\frac{3(x-y+z-2)}{-2}\right\}^2+\left\{y+1-\frac{(x-y+z-2)}{-2}\right\}^2+\left\{z+2-\frac{2(x-y+z-2)}{-2}\right\}^2$$

$$=\frac{(x-y+z-2)^2}{-2}$$

$$\left(\frac{x-3y+3z}{-2}\right)^2+\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2-(x-y+2z)^2=\left(\frac{x-y+z-2}{-2}\right)^2$$

$$(x-3y+3z)^2+(x+y+z)^2-4(x-y+2x)^2=(x-y+z-2)^2\text{...............(*)}$$

Untuk

$$(x-3y+3z)^2 = x^2+9y^2+9z^2-6xy+6xz-18yz$$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

$$4(x-y+2z)^2 = 4x^2-4y^2-16z^2+8xy-16xz+16yz$$

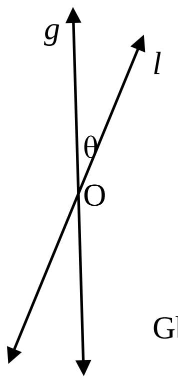
$$(x-y+z-2)^2 = x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz-4x+4y-4z+4$$

Berdasarkan (*) maka diperoleh persamaan kerucut yang diminta adalah:

$$3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-4x+4y-4z+4=0$$

F. Irisan Kerucut

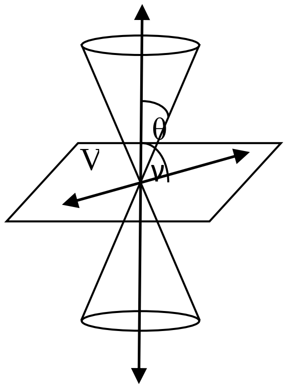
Irisan kerucut adalah tempat kedudukan titik-titik sedemikian hingga perbandingan jarak titik ke suatu titik tertentu dan garis tertentu tetap harganya.



Gb. 8

Perhatikan gambar 8, jika garis l dan garis g berpotongan di titik O dan membentuk sudut sebesar θ. Jika garis l diputar mengelilingi garis g dengan besar sudut tetap maka lintasan hasil perputaran berupa kerucut lingkaran tegak. Garis g disebut garis sumbu dan garis l disebut garis pelukis, titik O disebut titik puncak kerucut dan θ disebut setengah sudut puncak.

Jika ada sebuah bidang V (bidang iris) memotong kerucut dengan membentuk sudut sebesar γ maka ada tujuh kemungkinan bentuk irisan bidang V dengan kerucut tersebut.



Gb. 9

1. Jika bidang iris (penampang) melalui titik puncak O maka mempunyai kemungkinan:
   i) $\gamma > \theta$ irisannya berupa titik
   ii) $\gamma < \theta$ irisannya berupa 2 garis berpotongan
   iii) $\gamma = \theta$ irisannya berupa sebuah garis singgung

2. jika bidang iris (penampang) memotong kerucut tidak pada puncak maka mempunyai kemungkinan:

i) $\gamma = 90^0$ irisannya berupa lingkaran
ii) $\gamma = \theta$ irisannya berupa parabola
iii) $\gamma > \theta$ irisannya berupa elips
iv) $\gamma < \theta$ irisannya berupa hiperbola

Jika irisan kerucut ditinjau secara analitis maka irisan kerucut adalah tempat kedudukan himpunan titik yang perbandingan jarak titik tersebut dengan titik tertentu (Fokus) dan garis tertentu (Direktriks) tetap nilainya. Nilai tetap ini selanjutnya disebut eksentrisitas dan disingkat e. Kemungkinan-kemungkinan irisan kerucut yang terjadi ditinjau dari nilai e adalah:

$e = 1$	irisan berupa parabola
$0 < e < 1$	irisan berupa elips
$e > 1$	irisan berupa hiperbola
$e = 0$	irisan berupa lingkaran

Contoh:

Carilah persamaan irisan kerucut dengan direktriks $2x - 3y + 6 = 0$ fokusnya F(-1,-2) dan eksentrisitasnya $e = 1$

Jawab:

1. Ambil sebarang titik pada irisan kerucut misal $A(x_A, y_A)$
2. Jarak A ke garis direktriks (di titik P) sama dengan jarak A ke titik F

AP = $\left|\dfrac{2x_A - 3y_A + 6}{\pm\sqrt{4+9}}\right| = \dfrac{2x_A - 3y_A + 6}{\pm\sqrt{13}}$

$\Leftrightarrow$AF = $\sqrt{(x_A + 1)^2 + (y_A + 2)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{AP}{AF} = e = 1$ maka $AP = AF$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x_A - 3y_A + 6}{\sqrt{13}} = \sqrt{(x_A + 1)^2 + (y_A + 2)^2}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2x_A - 3y_A + 6}{\sqrt{13}}\right)^2 = \left(\sqrt{(x_A + 1)^2 + (y_A + 2)^2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4x_A^2 + 9y_A^2 + 36 - 6x_Ay_A - 18y_A = 13(x_A^2 + 2x_A + 1 + y_A2 + 4y_A + 4)$

$\Leftrightarrow 9x_A^2 + 4y_A^2 + 12x_Ay_A + 14x_A + 70y_A + 29 = 0$

Koordinat titik A dijalankan didapat

$9x^2 + 4y^2 + 12xy + 14x + 70y + 29 = 0$

Jadi persamaan irisan kerucut dengan direktrik $2x - 3y + 6 = 0$ fokusnya F(-1,-2) dan eksentrisitasnya e = 1 adalah
$9x^2 + 4y^2 + 12xy + 14x + 70y + 29 = 0$

G. Persamaan Derajat Dua

Bentuk Umum: $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Diskriminasi $D_k = A.B - C^2$

Jika $D_k > 0$ grafik berupa elips

Jika $D_k < 0$ grafik berupa hiperbola

Jika $D_k = 0$ grafik berupa parabola

Jika A = B dan C = 0 grafik berupa lingkaran

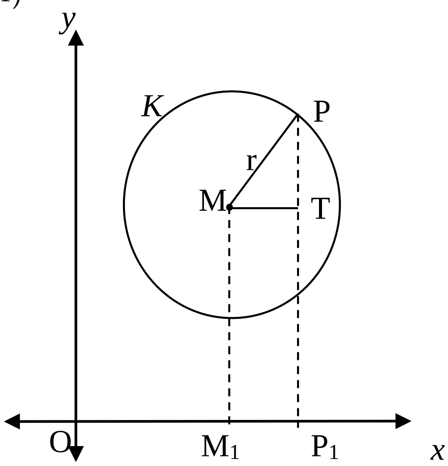
BAB V
LINGKARAN di R^2

A. Definisi Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan titik-titik (tempat kedudukan titik-titik) pada bidang datar yang berjarak sama ke sebuah titik tertentu. Titik terentu tersebut disebut "Pusat Lingkaran", dan jarak yang sama itu disebut "Jari-Jari Lingkaran". Lingkaran yang berpusat di titik M dan berjari-jari r ditulis dengan lambang (M, r).

Perhatikan gambar 1

Lingkaran *K* = (M,r)



Gambar 1

Untuk memperoleh persamaan lingkaran K, dilakukan cara berikut :

Ambil sebarang titik P pada *K*

M_1= Proyeksi M pada sumbu x

P_1 = Proyeksi P pada sumbu x

T = Proyeksi M pada sumbu PP_1

Pada segitiga MPT (siku-siku di T), maka

$$MT^2 + PT^2 = MP^2$$

$$\Leftrightarrow \quad M_1P_1^2 + (PP_1 - TP_1)^2 = MP^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (OP_1 - OM_1)^2 + (PP_1 - MM_1)^2 = MP^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 = R^2$$

Jika koordinat titik P dijalankan, terdapatlah persamaan lingkaran *K*, yaitu:

$$K \equiv (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$$

Adalah persamaan lingkaran yang berpusat di titik M dan berjari-jari = R
Jika persamaan lingkaran K tersebut dijalankan maka didapat :

$$K \equiv (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$$
$$K \equiv x^2 - 2x_M x + x_M^2 + y^2 - 2y_M y + y_M^2 - R^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad K \equiv x^2 + y^2 - 2x_M x - 2y_M y + x_M^2 + y_M^2 - R^2 = 0$$

Jika $-2x_M = A$ $\qquad -2y_M = B$ $\qquad x_M^2 + y_M^2 - R^2 = C$
maka persamaan lingkaran K menjadi :

$$K \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

untuk $-2x_M = A \quad \Leftrightarrow \quad x_M = -\frac{1}{2}A$

$-2y_M = B \quad \Leftrightarrow \quad y_M = -\frac{1}{2}B$

Jadi pusat lingkaran K adalah M $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$

untuk $x_M^2 + y_M^2 - R^2 = C \Leftrightarrow R^2 = x_M^2 + y_M^2 - C$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$
$$\Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

Jadi jari-jari lingkaran K adalah $R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Contoh:

1. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik pusat salib sumbu O dan berjari-jari 3
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
3. Carilah titik potong lingkaran $x^2 + y^2 - 3x + 3y - 10 = 0$ dengan sumbu-sumbu koordinat

Jawab:

1. Persamaan lingkaran *K* (0,3) adalah :

   $K \equiv (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = 3^2$

   $\Leftrightarrow K \equiv x^2 + y^2 = 9$

   $L \equiv x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

   Titik Pusat lingkaran *L* adalah M $(-\frac{1}{2}.-4,-\frac{1}{2}.6)$ atau M (2,-3)

   Jari-jari lingkaran *L* adalah $R = \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(6)^2 - (-3)}$ atau

   $R = \sqrt{16} = 4$

2. $L \equiv x^2 + y^2 - 3x + 3y - 10 = 0$

   Misal titik A = titik potong L dengan sumbu x, maka

   $x_A^2 + y_A^2 - 3x_A + 3y_A - 10 = 0$ dan $y_A = 0$

   $\Leftrightarrow x_A^2 - 3x_A - 10 = 0$

   $\Leftrightarrow (x_A - 5)(x_A + 2) = 0$

   $\Leftrightarrow x_{A1} = 5$ dan $x_{A2} = -2$

   Jadi titik potong L dengan sumbu x adalah

   A_1 (5,0) dan A_2 (-2,0)

   Misal titik B = titik potong L dengan sumbu y, maka

   $x_B^2 + y_B^2 - 3x_B + 3y_B - 10 = 0$ dan $x_B = 0$

   $3\Leftrightarrow y_B^2 + 3y_B - 10 = 0$

   $\Leftrightarrow (y_B + 5)(y_B - 2) = 0$

   $\Leftrightarrow y_B = 5$ dan $y_B = 2$

   Jadi titik potong L dengan sumbu y adalah

   B_1 (0,-5) dan B_2 (0,2)

Soal

1. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik P(3,0), Q(6,6) dan R(0,4)
2. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik M(3,2) dan menyinggung garis $g \equiv 2x - y + 1 = 0$
3. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik P(3,1) menyinggung sumbu y dan pusatnya terletak pada garis $g \equiv x - y - 1 = 0$
4. Diketahui titik A (2,-3) dan B (-2, 3)

   Tentukan persamaan lingkaran yang diameternya adalah $\overline{AB}$

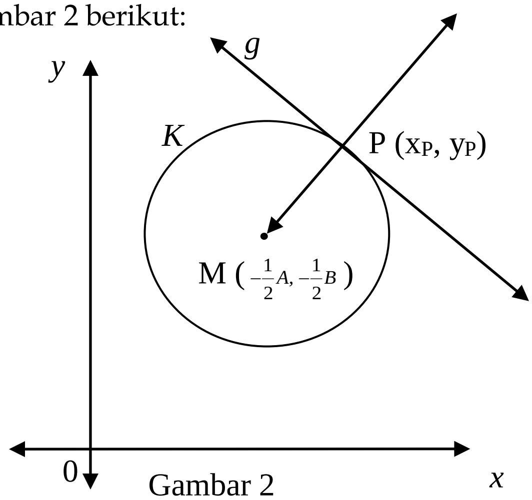
B. Garissinggung Pada Lingkaran

1. Garissinggung Pada Lingkaran Yang Melalui Titik Singgungnya

Pada lingkaran *K* terletak titik P

Persamaan garissinggung pada *K* dengan titik singgung P ditentukan dengan cara berikut:

Perhatikan gambar 2 berikut:



Gambar 2

Lingkaran *K* (M,R) yang persamaannya $K \equiv\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

M = Titik pusat lingkaran K, maka $x_M = -\frac{1}{2}A$ dan $y_M = -\frac{1}{2}B$. Jadi persamaan garis $\overleftrightarrow{MP}$ adalah

$$\overleftrightarrow{MP} \equiv \frac{x - x_P}{x_M - x_P} = \frac{y - y_P}{y_M - y_P}$$

$$\overleftrightarrow{MP} \equiv \left(-\frac{1}{2}B - y_P\right)(x - x_P) = \left(-\frac{1}{2}A - x_P\right)(y - y_P)$$

$$\overleftrightarrow{MP} \equiv \left(-\frac{1}{2}B - y_P\right)x - \left(-\frac{1}{2}B - y_P\right)x_P = \left(-\frac{1}{2}A - x_P\right)y - \left(-\frac{1}{2}A - x_P\right)y_P$$

$$\overleftrightarrow{MP} \equiv y = \frac{-\frac{1}{2}B - y_P}{-\frac{1}{2}A - x_P}x + \frac{\frac{1}{2}B.x_P + x_p.y_p - \frac{1}{2}A.y_P - x_p.y_p}{-\frac{1}{2}A - x_P}$$

$$\overleftrightarrow{MP} \equiv y = \frac{\left(-\frac{1}{2}B - y_P\right)x + \frac{1}{2}B.x_P - \frac{1}{2}A.y_P}{-\frac{1}{2}A - x_P}$$

maka gradien garis $\overleftrightarrow{MP}$, $m_{\overleftrightarrow{MP}} = \dfrac{-\frac{1}{2}B - y_p}{-\frac{1}{2}A - x_P}$ atau $m_{\overleftrightarrow{MP}} = \dfrac{\frac{1}{2}B + y_p}{\frac{1}{2}A + x_P}$

misal g = garissinggung pada K dengan titik singgung P, maka garis g tegak lurus garis $\overleftrightarrow{MP}$. $m_g = -\dfrac{1}{m_{\overleftrightarrow{MP}}}$ dan garis g melalui titik P, maka

$x_P^2 + y_P^2 + Ax_P + By_P + C = 0$ ………. (1)

Jadi persamaan garis g adalah :

$g \equiv y - y_P = m_g\,(x - x_p)$

$\Leftrightarrow g \equiv y - y_P = -\dfrac{1}{m_{\overleftrightarrow{MP}}}\,(x - x_p)$

$\Leftrightarrow g \equiv y - y_P = \dfrac{-\frac{1}{2}A - x_P}{\frac{1}{2}B + y_p}\,(x - x_p)$

$\Leftrightarrow g \equiv \left(\frac{1}{2}B + y_P\right)\left(y - y_p\right) = \left(-\frac{1}{2}A - x_P\right)\left(x - x_P\right)$

$\Leftrightarrow g \equiv \frac{1}{2}B.y - \frac{1}{2}B.y_P + y_P.y - y_P^2 = -\frac{1}{2}A.x + \frac{1}{2}A.x_P - x_P.x + x_P^2$

$\Leftrightarrow g \equiv \frac{1}{2}B.y - \frac{1}{2}B.y_P + y_P.y - y_P^2 + \frac{1}{2}A.x - \frac{1}{2}A.x_P + x_P.x - x_P^2 = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv x_P.x + y_P.y - \frac{1}{2}A.x_P + \frac{1}{2}A.x - \frac{1}{2}B.y_P + \frac{1}{2}B.y - x_P^2 - y_P^2 = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv$

$x_P.x + y_P.y - A.x_P + \frac{1}{2}A.x_P + \frac{1}{2}A.x - B.y_P + \frac{1}{2}B.y_P + \frac{1}{2}B.y - x_P^2 - y_P^2 = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv$

$x_P.x + y_P.y + \frac{1}{2}A(x_P + x) + \frac{1}{2}B(y_P + y) - x_P^2 - y_P^2 - A.x_P - B.y_P = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv$

$x_P.x + y_P.y + \frac{1}{2}A(x_P + x) + \frac{1}{2}B(y_P + y) - x_P^2 - y_P^2 - A.x_P - B.y_P - C + C = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv x_P.x + y_P.y + \frac{1}{2}A(x_P + x) + \frac{1}{2}B(y_P + y) - (x_P^2 + y_P^2 + A.x_P + B.y_P + C) + C = 0$

Dengan memperhatikan persamaan (1), maka didapat persamaan garissinggung *g* adalah:

$$x_P.x + y_P.y + \frac{1}{2}A(x_P + x) + \frac{1}{2}B(y_P + y) + C = 0$$

adalah persamaan garissinggung pada lingkaran *K* di titik singgungnya P.

Contoh:
Tentukanlah persamaan garissinggung pada lingkaran *K* yang titik singgungnya adalah titik potong *K* dengan sumbu *x*, jika K dinyatakan oleh persamaan $K \equiv x^2 + y^2 - 3x + 2y - 10 = 0$

Jawab:
$K \equiv x^2 + y^2 - 3x + 2y - 10 = 0$
Misal A = titik potong K dengan sumbu x, maka

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 - 3x_A + 2y_A - 10 = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_A^2 - 3x_A - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x_A - 5)(x_A + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x_{A_1} = 5$ atau $x_{A_2} = -2$

Jadi titik potong K dengan sumbu x adalah A_1 (5,0) dan A_2 (-2,0)
Misal *g* = garissinggung pada K di titik singgung A_1 maka persamaan garis g adalah :

$g \equiv x_{A_1}.x + y_{A_1}.y - \frac{3}{2}(x_{A_1} + x) + (y_{A_1} + y) - 10 = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv 5x + 0y - \frac{3}{2}(5 + x) + (0 + y) - 10 = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv 5x - \frac{15}{2} - \frac{3}{2}x + y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv 5x - \frac{15}{2} - \frac{3}{2}x + y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv 3\frac{1}{2}x + y - 17\frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow g \equiv 7x + 2y - 35 = 0$

Misal l = garissinggung pada K di titik singgung A, maka persamaan garis l adalah:

$l \equiv x_{A2}.x + y_{A2}.y - \frac{3}{2}(x_{A2} + x) + (y_{A2} + y) - 10 = 0$

$\Leftrightarrow l \equiv -2x + 0y - \frac{3}{2}(-2 + x) + (0 + y) - 10 = 0$

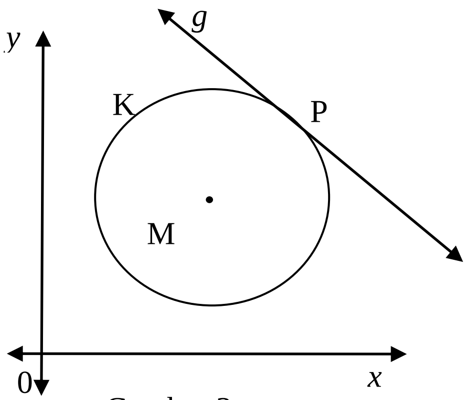
$\Leftrightarrow l \equiv -2x + 3 - \frac{3}{2}x + y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow l \equiv -3\frac{1}{2}x + y - 7 = 0$

$\Leftrightarrow l \equiv 7x - 2y + 14 = 0$

2. Garissinggung Pada Lingkaran Yang Gradiennya Ditentukan

Persamaan garissinggung pada lingkaran K dengan gradien m, ditentukan dengan cara berikut:



Gambar 3

Perhatikan gambar 3 di atas
Lingkaran K dengan persamaan:

$K \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Ambil sebarang garis g dengan gradien = m dan yang memotong lingkaran K, yaitu:

$g \equiv y = mx + n$

Misal salah satu titik potong garis g dengan lingkaran K adalah P, maka diperoleh:

$$\begin{cases} x_P^2 + y_P^2 + A.x_P + B.y_P + C = 0 \\ y_P = m.x_P + n \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_P^2 + (m.x_P + n)^2 + A.x_P + B(m.x_P + n) + C = 0$ ....(*)

Adalah persamaan kuadrat dalam x_P.
Supaya garis g menyinggung lingkaran K, maka Diskriminan pada persamaan (*) bernilai nol.
dari persamaan yang didapat dicari nilai n, dan selanjutnya diperoleh persamaan persamaan garis *g* tersebut yaitu

$$\boxed{y + \frac{1}{2}B = m\left(x + \frac{1}{2}A\right) \pm r\sqrt{1+m^2}}$$

Contoh:
Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $K \equiv x^2 + y^2 + 2x - y + 1 = 0$ yang sejajar garis $g \equiv y = 2x - 7$

Jawab:
Ambil sebarang garis *l* yang sejajar garis g dan memotong *K*, yaitu $l \equiv y = 2x + n$.
Misal salah satu titik potong *l* dan *K* adalah A, maka diperoleh

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 + 2x_A - y_A + 1 = 0 \\ y_A = 2x_A + n \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_A^2 + (2x_A + n)^2 + 2x_A - (2x_A + n) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_A^2 + 4x_A^2 + 4nx_A + n^2 + 2x_A - 2x_A - n + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 5x_A^2 + 4nx_A + n^2 - n + 1 = 0$ ....(*)

Supaya garis *l* menyinggung lingkaran K, maka D pada persamaan (*) bernilai nol

Jadi $D = (4n)^2 - 4.5\,(n^2 - n + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $16n^2 - 20n^2 + 20n - 20 = 0$
$\Leftrightarrow$ $-4n^2 + 20n - 20 = 0$
$\Leftrightarrow$ $n^2 - 5n + 5 = 0$
$\Leftrightarrow$ $n = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

Jadi persamaan garissinggung pada *K* yang sejajar *g* adalah :

$l_1 \equiv y = 2x + \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ dan $l_2 \equiv y = 2x + \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$

Soal Latihan

1. Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran $K \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$ yang titik singgungnya adalah titik potong lingkaran *K* dengan sumbu *y*.
2. Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran $S \equiv x^2 + y^2 + x - 5y - 2 = 0$ yang titik singgungnya berordinat 1.
3. Diketahui : $L \equiv x^2 + y^2 - x + 2y - 8 = 0$
   $k \equiv 2x - 3y + 5 = 0$
   Tentukan : a. Persamaan garissinggung pada L yang sejajar *k*
   b. Persamaan garissinggung pada L yang tegak lurus *k*
4. Diketahui : P (1,2), Q(2,0), dan R(2,-1)
   Tentukan : a. Persamaan lingkaran M yang melalui titik P, Q, dan titik R
   b. Persamaan garissinggung pada lingkaran *M* yang sejajar garis $\overleftrightarrow{PQ}$
   c. Persamaan garissinggung pada lingkaran *M* yang tegak lurus garis $\overleftrightarrow{QR}$
   d. Persamaan garissinggung pada lingkaran *M* yang melalui C
5. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $K \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ yang melalui titik S (2,1)

C. Garis Kutub Dan Titik Kutub Pada Lingkaran

Lingkaran K dengan persamaannya :

$K \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dan titik P terletak pada lingkaran *K*.

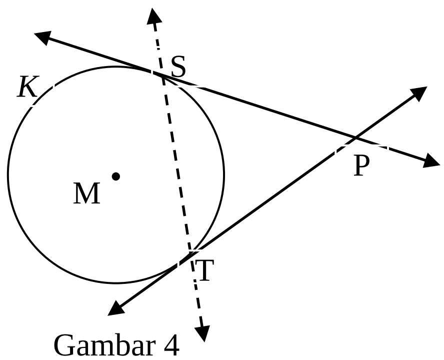
Jika persamaan

$$x_P x + y_p y + \frac{1}{2}A(x_p + x) + \frac{1}{2}B(y_p + y) + C = 0 \text{..............}(*)$$

Menyatakan garissinggung pada lingkaran K dengan titik singgung P. Jika titik P terletak di luar lingkaran *K*, maka (*) menyatakan garis kutub titik P terhadap lingkaran *K*. Sedangkan titik P disebut titik kutub garis (*) tersebut terhadap lingkaran *K*.

Secara geometris garis kutub dan titik kutub itu dinyatakan sebagai berikut,

Perhatikan gambar 4



Gambar 4

Lingkaran *K* dan titik P terletak di luar lingkaran *K*.

Melalui titik P dilukis garissinggung pada lingkaran *K* dengan titik–titik singgungnya S dan T. Maka garis $\overleftrightarrow{ST}$ adalah garis kutub titik P terhadap lingkaran *K*.

Bukti:

Garis $\overleftrightarrow{PT}$ adalah garissinggung pada lingkaran *K* dengan titik singgung T, persamaan $\overleftrightarrow{PT}$ adalah:

$$x_T x + y_T y + \frac{1}{2}A(x_T + x) + \frac{1}{2}B(y_T + y) + C = 0$$

Sedangkan titip P terletak pada garis PT, jadi

$$x_T x_P + y_T y_P + \frac{1}{2}A(x_T + x_P) + \frac{1}{2}B(y_T + y_P) + C = 0 \text{....................}(1)$$

Garis $\overleftrightarrow{PS}$ adalah garissinggung pada lingkaran K, dengan titik singgung S, jadi persamaan $\overleftrightarrow{PS}$ adalah :

$$x_S x + y_S y + \frac{1}{2}A(x_S + x) + \frac{1}{2}B(y_S + y) + C = 0$$

Sedangkan titik P terletak pada garis PS, jadi

$$x_S x_P + y_S y_P + \frac{1}{2}A(x_S + x_P) + \frac{1}{2}B(y_S + y_P) + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa persamaan garis $\overleftrightarrow{ST}$ adalah:

$x_P x + y_P y + \frac{1}{2}A(x_p + x) + \frac{1}{2}B(y_P + y) + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$, adalah garis kutup titik P terhadap lingkaran K.

Contoh:

Diketahui: $K \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y - 6 = 0$ Dan P (3, -1)

Melalui titik P dibuat garis-garissinggung pada lingkaran K, dengan titik singgung A dan B.

Tentukan: Persamaan garis $\overleftrightarrow{AB}$

Jawab: Melalui titik P dibuat garis-garissinggung pada lingkaran K, dengan titik-titik singgung A dan B. Maka garis $\overleftrightarrow{AB}$ adalah garis kutub titik P terhadap lingkaran K.

Di persamaan garis AB adalah :

$$x_P x + y_P y + \frac{3}{2}(x_P + x) - (y_P + y) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 3x - y + \frac{3}{2}(3 + x) - (-1 + y) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 3x - y + 4\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + 1 - y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 4\frac{1}{2}x - 2y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 9x - 4y - 1 = 0$$

Soal Latihan

1. Tentukanlan koordinat titik kutub dari gars kutub g≡ $3x - 4y - 4 = 0$ terhadap lingkaran

   $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

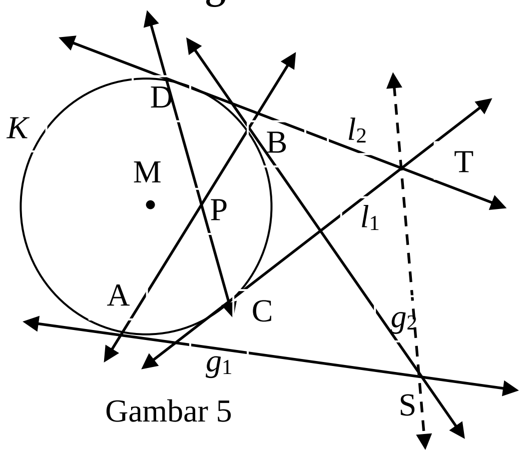
2. Diketahui lingkaran K dan garis g yang persamaannya:

   $K \equiv x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

   $g \equiv 3x - 2y - 12 = 0$

   Melalui titik-titik potong g dan K dibuat garis-garissinggung pada K.
   Ditanyakan : Koordinat titik potong garis–garissinggung tersebut.

D. Melukis Garis Kutub Jika Titik Kutubnya Terletak Di Dalam Lingkaran



Gambar 5

Diketahui lingkaran *K* dan titik P terletak di dalam lingkaran *K*. Melukis garis kutub titik P terhadap lingakaran *K* dilakukan dengan cara sebagai berikut :

Perhatikan gambar 5

(1) Melalu titik P dilukis talibusur AB

(2) Dilukis garissinggung g_1 dengan titik singgung A, dan dilukis garissinggung g_2 dengan titik singgung B

(3) Garis g_1 dan g_2 berpotongan di titik S.

(4) Melalui titik P dilukis talibusur CD.

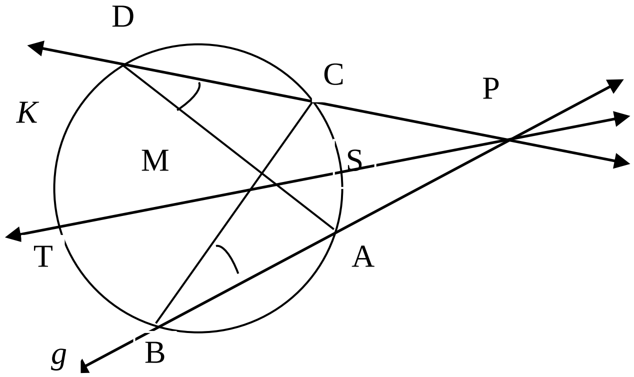
(5) Dilukis garissinggung l_1 dengan titik singgung C, dan dilukis garissinggung l_2 dengan titik singgung D.

(6) Garis l_1 dan l_2 berpotongan di titik T.

Maka garis $\overleftrightarrow{ST}$ adalah garis kutub titik P terhadap lingkaran *K*.
Selidikilah Kebenarannya.

E. Kuasa Pada Lingkaran

Lingkaran $K \equiv (M, R) = (X - X_M)^2 + (Y - Y_M)^2 = R^2$
Titik P terletak di luar lingkaran K. Perhatikan gambar 31.



Gambar 6

Perhatikan gambar 6
Garis *g* melalui titik P dan memotong lingkaran *K* di titik-titik A dan B. Yang dimaksud kuasa titik P terhadap lingkaran *K* adalah PA x PB
Kuasa titik P terhadap lingkaran *K* tersebut bernilai tetap. Artinya kuasa titil P terhadap lingkaran K itu tidak bergantung pada posisi garis *g* yang melalui titik P tersebut!

Bukti : Ambil garis *l* yang melalui P dan memotong lingkaran *K* di titik – titik C dan D maka kuasa titik P terhadap lingkaran *K* adalah $PC \ x \ PD$

Perhatikan Δ PAD dan Δ PBC
$m\angle D = m\angle B$ (menghadap busur AC)
$m\angle P = m\angle P$

Jadi Δ PAD sebangun dengan Δ PBC
Maka PA : PD = PC : PB
Atau PC x PD = PA x PB
Berarti kuasa titik P terhadap lingkaran *K* <u>bernilai tetap.</u>

Selanjutnya lukislah garis $\overleftrightarrow{PM}$ yang memotong lingkaran K di titik–titik S dan T.

Maka kuasa titik P terhadap lingkaran K adalah

$$\begin{aligned}&PS \times PT\\ &= (PM - MS)(PM + MT)\\ &= (PM - R)(PM + R)\\ &= PM^2 - R^2\\ &= (x_p - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 - R^2\end{aligned}$$

Jadi kuasa titik P terhadap lingkaran $K \equiv (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = R^2$ adalah $(x_p - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 - R^2$

Dengan uraian sama,

kuasa titik P terhadap lingkaran $K \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $= x_P^2 + y_P^2 + Ax_P + By_P + C$.

Tinjauan :

(1) Jika kuasa titik P terhadap lingkaran K bernilai positif, maka
$PM^2 - R^2 > 0$
$\Leftrightarrow PM^2 > R^2$
$\Leftrightarrow PM > R$
Artinya titik P terletak di luar lingkaran K

(2) Jika kuasa titik P terhadap lingkaran K bernilai negatif, maka titik P terletak di dalam lingkaran K.

(3) Jika kuasa titik P terhadap lingkaran K bernilai nol, maka titik P terletak pada lingkaran K.

Soal

1. Selidikilah letak titik – titik A (5,2), B (-1, -6) dan C (7,1) terhadap lingkaran $L \equiv (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$
(terletak di dalam, di luar, atau pada lingkaran)
2. Melalui titik A(4,2) dilukis garissinggung pada lingkaran $K \equiv x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ dengan titik singgung S. Tentukan setengah panjang ruas garis $\overleftrightarrow{AS}$.

F. Garis Kuasa

Definisi:

Himpunan titik-titik (tempat kedudukan titik-titik) yang berkuasa sama terhadap dua lingkaran disebut garis kuasa kedua lingkaran tersebut.

Bukti:

$$K1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$K2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Misal titik P berkuasa sama terhadap K_1 dan K_2, maka

$$x_P^2 + y_P^2 + A_1x_P + B_1y_P + C_1 = x_P^2 + y_P^2 + A_2x_P + B_2y_P + C_2$$

$$\Leftrightarrow A_1x_P + B_1y_P + C_1 = A_2x_P + B_2y_P + C_2$$

$$\Leftrightarrow (A_1 - A_2)x_P + (B_1 - B_2)y_P + C_1 - C_2 = 0$$

Himpunan titik yang berkuasa sama terhadap K_1 dan K_2 didapat bila koordinat titik P dijalankan.

Maka terdapatlah tempat kedudukan itu

$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$ Adalah persamaan garis lurus,

dan disebut **garis kuasa K_1 dan K_2**

Garis kuasa lingkaran dilambangkan dengan $\boxed{K_1 - K_2 = 0 \text{ atau } K_1 = K_2}$

Bila ditentukan tiga lingkaran K_1, K_2 dan K_3 maka titik yang berkuasa sama terhadap 3 lingkaran itu disebut **titik kuasa lingkaran** terhadap K_1, K_2, K_3 dilambang :

$$\boxed{K_1 = K_2 = K_3 \quad \text{atau} \quad \begin{cases} K_1 - K_2 = 0 \\ K_1 - K_3 = 0 \end{cases}}$$

Contoh soal:

Tentukan persamaan garis kuasa lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 = 25$ dan

$$L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

Jawab:

$$L_1 \equiv x^2 + y^2 = 25$$

$$L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

Misal garis g adalah garis yang berkuasan sama terhadap L_1 dan L_2

Maka persamaan garis g adalah:

$$g \equiv L_1 - L_2 = 0$$
$$g \equiv (x^2 + y^2 - 25) - (x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4) = 0$$
$$g \equiv 2x + 4y - 21 = 0$$

Soal Latihan :

1. Diketahui : $K_1 \equiv x^2+y^2+2x-4y-6=0$
   $K_2 \equiv (M,3)$ *dan* $M(1,2)$
   $g \equiv 2x - y + 3 = 0$

   Tentukan: a. Koordinat titik pada sumbu x yang berkuasa sama terhadap K_1 dan K_2
   b. Koordinat titik pada garis g yang berkuasa sama terhadap K_1 dan K_2
2. Tentukan koordinat titik kuasa 3 lingkaran

   $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$

   $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$

   $L_3 \equiv x^2 + y^2 = 4$

G. Melukis Garis Kuasa

Melukis garis kuasa dua lingkaran K_1 dan K_2 dengan bebagai kedudukan dari lingkaran K_1 dan K_2 tersebut

1. Jika K_1 dan K_2 berpotongan di titik A dan B maka garis kuasa K_1 dan K_2 adalah garis AB

   Bukti:

   Titik A terletak pada K_1 maka kuasa titik A terhadap K_1 adalah nol

   Titik A terletak pada K_2 maka kuasa titik A terhadap K_2 adalah nol

   Jadi titik A berkuasa sama terhadap K_1 dan K_2

   Dengan uraian yang sama didapat juga bahwa titik B berkuasa sama terhadap K_1 dan K_2. Maka titik A dan B terletak pada garis kuasa. Berarti garis kuasa lingkaran K_1 dan K_2 adalah garis AB
2. Jika K_1 dan K_2 bersinggungan di titik singgung. Lukislah garis kuasa K_1 dan K_2 tersebut (Jelaskan alasannya)
3. Jika K_1 dan K_2 saling lepas. Lukislah garis kuasa K_1 dan K_2 tersebut (Jelaskan alasannya)

H. Berkas Lingkaran

Jika lingkaran K_1 dan K_2 yang persamaannya adalah sebagai berikut

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

maka $K_1 + \lambda K_2 = 0,\ \lambda \in \text{Bilangan Real}$ juga menyatakan persamaan lingkaran.

Bukti:

$$K_1 + \lambda K_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

$$(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + (A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + C_1 + \lambda C_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{A_1 + \lambda A_2}{1+\lambda}x + \frac{B_1 + \lambda B_2}{1+\lambda}y + \frac{C_1 + \lambda C_2}{1+\lambda} = 0$$

adalah persamaan lingkaran yang memuat λ. Jadi persamaan tersebut menyatakan lingkaran yang tak hingga banyak, dan selanjutnya disebut berkas lingkaran.

Sifat-sifat berkas lingkaran

1. Untuk setiap nilai λ didapat satu persamaan lingkaran yang merupakan anggota berkas. Sedangkan K_1 dan K_2 disebut anggota dasar dari berkas itu
2. Berkas lingkaran tersebut ekivalen dengan berkas yang disusun oleh setiap 2 anggotanya

   Misal untuk $\lambda = \lambda_1$, didapat anggota berkas K_3

   Misal untuk $\lambda = \lambda_2$, didapat anggota berkas K_4

   Maka berkas lingkaran yang disusun oleh K_3 dan K_4 adalah

   $K_3 + \mu K_4 = 0, \mu \in R$ tentu ekivalen dengan berkas semula yaitu

   $K_1 + \lambda K_2 = 0$ (Selidikilah)
3. Garis kuasa anggota dasarnya adalah garis kuasa setiap 2 anggota berkas. Karena itu garis kuasa itu disebut garis kuasa berkas (selidikilah)
4. Jika K_1 dan K_2 berpotongan di titik A dan B maka semua anggota berkas tentu melalui titik A dan B tersebut

Bukti:

A= titik potong K_1 dan K_2 , maka

A terletak pada K_1 $x_A^2 + y_A^2 + A_1x_A + B_1y_A + C_1 = 0$

A terletak pada K_2 $x_A^2 + y_A^2 + A_2x_A + B_2y_A + C_2 = 0$

Selanjutnya diselidiki letak titik A terhadap berkas lingkaran tersebut

$$K_1 + \lambda K_2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

Jika pada ruas kiri, x diganti x_A dan y diganti y_A maka

$$x_A^2 + y_A^2 + A_1x_A + B_1y_A + C_1 + \lambda(x_A^2 + y_A^2 + A_2x_A + B_2y_A + C_2) = 0$$

Menurut (1) dan (2)

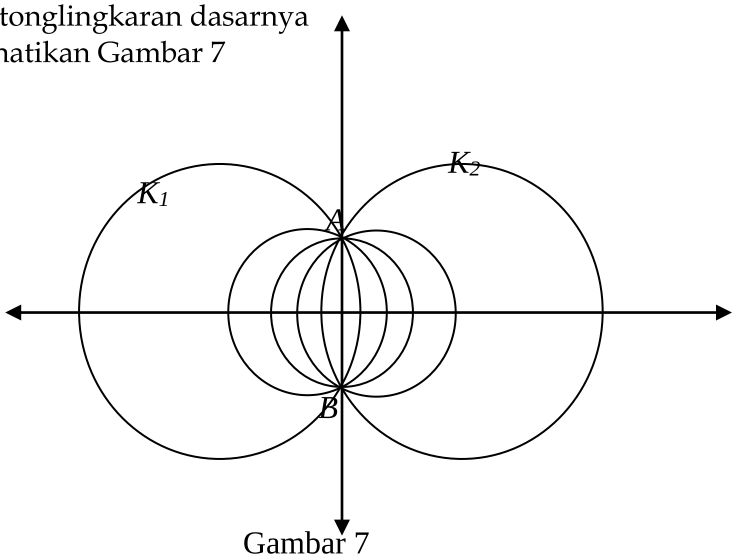
$0 + \lambda.0 = 0$

Berarti koordinat titik A memenuhi persamaan berkas lingkaran tersebut.

Dengan uraian sama dapat disebutkan bahwa titik B juga memenuhi persamaan berkas lingkaran itu.

Jadi setiap anggota berkas selalu melalui titik A dan B yaitu titik potonglingkaran dasarnya

Perhatikan Gambar 7



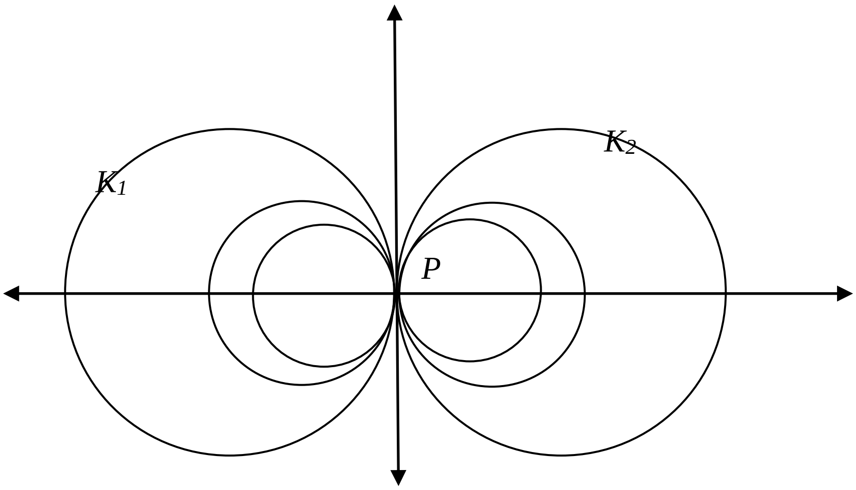
Gambar 7

Anggota berkas terbesar adalah garis kuasa berkas yaitu garis yang melalui titik A dan B tersebut (Jelaskanlah)

Anggota berkas terkecil adalah lingkaran yan diameternya adalah segmen garis AB (jelaskanlah)

Jika K_1 dan K_2 bersinggungan di titik P maka semua anggota berkas saling bersinggungan di titik P (Selidikilah)

Perhatikan Gambar 8



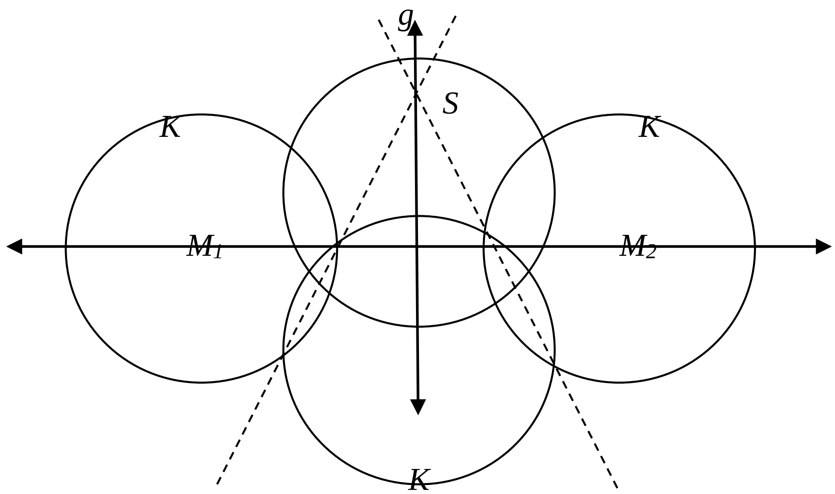
Gambar 8

Anggota berkas terbesar adalah garis kuasa berkas yaitu garissinggung persekutuan K_1 dan K_2 di titik singgung P

Anggota berkas terkecil adalah lingkaran titik P, yaitu lingkaran yang berpusat di titik P dan berjari-jari nol, dengan lambang (P,0) (Selidikilah)

Jika K_1dan K_2 saling lepas maka semua naggota berkas saling lepas (tidak berpotongan dan tidak bersinggungan)

Perhatikan Gambar 9



Gambar 9

g = garis kuasa berkas

g tegaklurus dengan $\overleftrightarrow{M_1 M_2}$

Jadi titik S berkuasa sama terhadap K_1 dan K_2

Contoh:

1. Diketahui : $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
   $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 16 = 0$

   a. Susunlah berkas lingkaran dengan anggota dasarnya L_1 dan L_2
   b. Tentukan persamaan anggota berkas yang melalui titik P(3,1)

2. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung lingkaran $K \equiv x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ di titik singgung S(1,2) dan melalui titik A(-2,5)

Jawab:

1. a Berkas lingkaran denan anggota dasar L_1 dan L_2 adalah

$$L_1 + \lambda L_2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 + \lambda(x^2 + y^2 - 16) = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda 16 = 0$$
$$(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 - 2x + 4y - 4 - 16\lambda = 0$$
$$x^2 + y^2 - \frac{2}{1+\lambda}x + \frac{4}{1+\lambda}y + \frac{-4-16\lambda}{1+\lambda} = 0$$

b. Persamaan anggota berkas yang melalui titik P(3, 1) ditentukan dengan cara sebagai berikut:

Anggota berkas melalui titik P (3, 1) berarti titik P(3, 1) terletak pada berkas itu

Maka

$$x_P^2 + y_P^2 - \frac{2}{1+\lambda}x_P + \frac{4}{1+\lambda}y_P + \frac{-4-16\lambda}{1+\lambda} = 0$$
$$9 + 1 - \frac{2}{1+\lambda}.3 + \frac{4}{1+\lambda}.1 + \frac{-4-16\lambda}{1+\lambda} = 0$$
$$10 - \frac{6}{1+\lambda} + \frac{4}{1+\lambda} + \frac{-4-16\lambda}{1+\lambda} = 0$$
$$10 - \frac{6+16\lambda}{1+\lambda} = 0$$
$$\frac{6+16\lambda}{1+\lambda} = 10$$
$$6 + 16\lambda = 10 + 10\lambda$$
$$6\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Jadi persamaan anggota berkas yang melalui titik P(3, 1) adalah

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{1+\frac{2}{3}}x + \frac{4}{1+\frac{2}{3}}y + \frac{-4-16\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\frac{5}{3}}x + \frac{4}{\frac{5}{3}}y + \frac{-4-\frac{32}{3}}{\frac{5}{3}} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{5}y - \frac{44}{5} = 0$$

2. Persamaan lingkaran yang menyinggung lingkaran *K* di titik singgung S adalah anggota berkas lingkaran dengan anggota dasar *K* dan *L* (*L* adalah lingkaran yang berpusat di titik S dan jari-jari 0)

$$L = (S,0)\ dan\ S(1,2) \equiv (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = 0$$

$$L \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

$$L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$

Berkas Lingkaran Dengan Anggota Dasar *K* dan *L* adalah

$$K + \lambda L = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5) = 0$$

Berkas ini melalui titik A(-2,5) sehingga koordinat titik A(-2,5) memenuhi persamaan berkas tersebut, maka

$$x_A^2 + y_A^2 - 6x_A - 4y_A + 9 + \lambda(x_A^2 + y_A^2 - 2x_A - 4y_A + 5) = 0$$
$$(-2)^2 + (5)^2 - 6(-2) - 4(5) + 9 + \lambda((-2)^2 + (5)^2 - 2(-2) - 4(-5) + 5) = 0$$
$$4 + 25 + 12 - 20 + 9 + \lambda(4 + 25 + 4 - 20 + 5) = 0$$
$$30 + 18\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$$

Jadi persamaan lingkaran yang ditanyakan adalah

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 - \frac{5}{3}(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5) = 0$$
$$3x^2 + 3y^2 - 18x - 12y + 27 - 5x^2 - 5y^2 + 10x + 20y - 25 = 0$$
$$-2x^2 - 2y^2 - 8x + 8y + 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$$

Soal Latihan:

1. Diketahui lingkaran K dan garis g yang dinyatakan oleh persamaan
   $K \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y - 10 = 0$
   $g \equiv x - 2y - 1 = 0$
   Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung lingkaran K dengan titik singgungnya adalah titik potong lingkaran K dengan sumbu x dan berpusat pada garis g
2. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0$ dan $g \equiv 2x - y - 1 = 0$ dan juga melalui titik A(1, 0)
3. Diketahui: Lingkaran K_1 dan K_2 yang dinyatakan
   $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$
   $K_2 \equiv (M,3)$ dengan $M(2,2)$
   dan $g \equiv x + 2y - 1 = 0$

   a. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong K_1 dan K_2 dan berpusat di g
   b. Tentukanlah persamaan lingkaran yang menyinggung garis g di titik singgungnya P(3,1) dan melalui titik A(-1,5)

BAB VI
BOLA di R^3

A. Definisi Bidang Bola

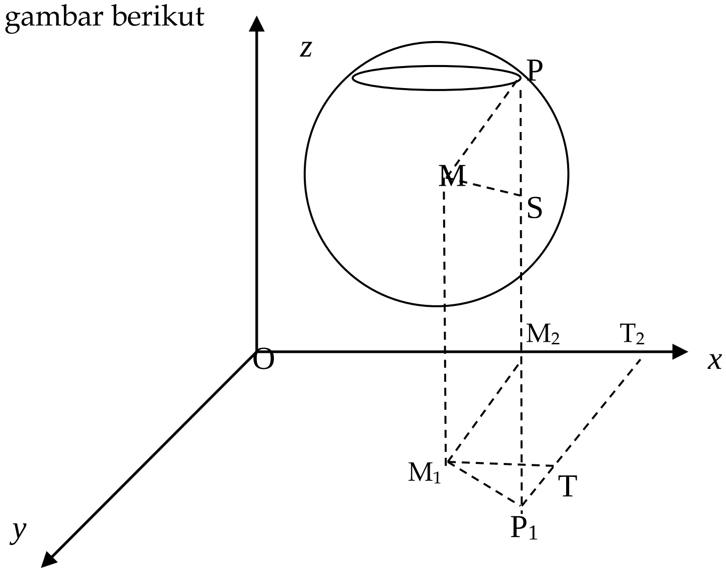
Bidang bola atau bola adalah himpunan titik-titik (tempat kedudukan titik-titik) di R^3 yang berjarak sama terhadap sebuah titik tetap.

Titik tetap itu adalah pusat bola dan jarak yang tetap itu disebut jari-jari bola.

Bola dengan titik pusat M dan berjari-jari R ditulis dengan lambang (M,R)

Untuk memperoleh persamaan bola (M,R) dilakukan cara berikut

Perhatikan gambar berikut



Ambil sebarang titik P yang terletak pada bola K

M_1: Proyeksi M pada *xoy*

P_1: Proyeksi P pada *xoy*

M_2: Proyeksi M_1 pada sumbu *x*

P_2: Proyeksi P_1 pada sumbu x

S: Proyeksi M pada PP_1

T: Proyeksi M_1 pada P_1P_2

Pada Δ MPS (Siku-siku pada S)

$MS^2 + PS^2 = MP^2$

$M_1P_1^2 + (PP_1 - SP_1)^2 = MP^2$

$(M_1T^2 + P_1T^2) + (PP_1 - MM_1) = MP^2$

$M_2P_2^2 + P_1P_2 - TP_2)2 + (PP_1 - MM_1)^2 = MP^2$

$(OP_2 - OM_2)^2 + (P_1P_2 - M_1M_2)^2 + (PP_1 - MM_1)^2 = MP^2$

$(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2 = R^2$

Bila koordinat P dijalankan terdapatlah persamaan bola K(M,R)

$K = (M, R) \equiv (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2$

Jika persamaan bola K(M,R) ini dijabarkan terdapatlah

$K : x^2 - 2x_M x + x_M^2 + y^2 - 2y_M y + y_M^2 + z^2 - 2z_M z + z_M^2 - R^2 = 0$

$K : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_M x - 2y_M y - 2z_M z + x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - R^2 = 0$

$-2x_M = A \Leftrightarrow x_M = -\frac{1}{2}A$

$-2y_M = A \Leftrightarrow y_M = -\frac{1}{2}B$

$-2z_M = A \Leftrightarrow z_M = -\frac{1}{2}C$

$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - R^2 = D \Leftrightarrow R^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 - D$

$$R^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2 - D$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2 - D}$$

Jadi Persamaan bola K (M,R)

$K : x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Pusat: M $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B, -\frac{1}{2}C)$

Jari-jari: R$= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2 - D}$

Contoh:

1. Tentukanlah persamaan bola yang berpusat di titik M(2, 1, -3) dan berjari-jari 4
2. Tentukan titik pusat dan jari-jari bola $K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$

Jawab

1. Persamaan bola yang berpusat di titik M(2, 1, -3) dan berjari-jari 4 adalah

$$K \equiv (M,4) : (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2$$

$$K \equiv (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4^2$$

$$K \equiv x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 - 16 = 0$$

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 2 = 0$$

2. Pada bola $K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$

Misal M = pusat bola K

$$x_M = -\frac{1}{2}(-2) = 1$$

Maka $y_M = -\frac{1}{2}(4) = -2$

$$z_M = -\frac{1}{2}(-6) = 3$$

Jadi pusat bola M (1, -2, 3)

Jari-jari bola adalah $R = \sqrt{\frac{1}{4}(-2)^2 + \frac{1}{4}(4)^2 + \frac{1}{4}(-6)^2 - (-2)} = 4$

Soal:

1. Tentukan persamaan bola yang berpusat di titik pusat salib sumbu (0,0,0) dan berjari-jari 3
2. Tentukan persamaan bola yang melalui 4 titik O(0,0,0), P(1,0,0), Q(0,2,0) dan R(0,0,1)
3. Selidikilah kedudukan bola $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y + 8z - 10 = 0$ dan bidang

$H \equiv x + 2y + 2z = 0$ (berpotongan, bersinggungan, atau saling lepas)

4. Tentukan persamaan bola yang berpusat di titik M(1, 2, -1) dan menyinggung bidang $W \equiv x + 2y - 3z + 1 = 0$
5. Diketahui: Bidang $V \equiv x + 2y + 2z = 3$

   Bola $B \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 8z + 4 = 0$

   Bidang V dan bola B berpotongan pada sebuah lingkaran K
   Ditanyakan: Panjang jari-jari lingkaran K dan pusat lingkaran K

B. Bidang Singgung Pada Bola

Pada bola K yang berpusat di M terletak titik P

Jika persamaan bola K dan koordinat titik P telah diketahui, maka persamaan bidang pada bola K dengan titik singgungnya P tersebut diperoleh sebagai berikut

$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

M = pusat bola K, maka $\begin{cases} x_M = -\dfrac{1}{2}A \\ y_M = -\dfrac{1}{2}B \\ z_M = -\dfrac{1}{2}C \end{cases}$

P adalah titik yang terletak pada bola K

Bilangan arah garis MP = $\left[(x_P + \frac{1}{2}A), (y_P + \frac{1}{2}B), (z_P + \frac{1}{2}C) \right]$

Jika V adalah bidang singgung pada bola K yang titik singgungnya P, maka V tegak lurus garis MP

Jadi V adalah bidang yang melalui titik P dengan bilangan arah = $\left[(x_P + \frac{1}{2}A), (y_P + \frac{1}{2}B), (z_P + \frac{1}{2}C) \right]$

Maka persamaan bidang V adalah

$$V \equiv (x_P + \frac{1}{2}A)(x - x_P) + (y_P + \frac{1}{2}B)(y - y_P) + (z_P + \frac{1}{2}C)(z - z_P) = 0$$

$$V \equiv x_P x - x_P^2 + \frac{1}{2}Ax - \frac{1}{2}Ax_P + y_P y - y_P^2 + \frac{1}{2}By - \frac{1}{2}By_P + z_P z - z_P^2 + \frac{1}{2}Cz - \frac{1}{2}Cz_P$$

$$V \equiv x_P x - x_P^2 + \frac{1}{2}Ax + (\frac{1}{2}Ax_P - Ax_P) + y_P y - y_P^2 + \frac{1}{2}By + (\frac{1}{2}By_P - By_P) +$$

$$z_P z - z_P^2 + \frac{1}{2}Cz + (\frac{1}{2}Cz_P - Cz_P) = 0$$

$$V \equiv x_P x - x_P^2 + \frac{1}{2}A(x + x_P) - Ax_P + y_P y - y_P^2 + \frac{1}{2}B(y + y_P) - By_P +$$

$$z_P z - z_P^2 + \frac{1}{2}C(z + z_P) - Cz_P = 0$$

$$V \equiv x_P x + y_P y + z_P z + \frac{1}{2}A(x + x_P) + \frac{1}{2}B(y + y_P) + \frac{1}{2}C(z + z_P) =$$

$$x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 + Ax_P + By_P + Cz_P$$

P adalah titik yang terletak pada bola K, maka

$x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 + Ax_P + By_P + Cz_P + D = 0$ atau

$x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 + Ax_P + By_P + Cz_P = -D$

Jadi

$$\boxed{V \equiv x_P x + y_P y + z_P z + \frac{1}{2}A(x + x_P) + \frac{1}{2}B(y + y_P) + \frac{1}{2}C(z + z_P) = -D}$$

atau

$$\boxed{V \equiv x_P x + y_P y + z_P z + \frac{1}{2}A(x + x_P) + \frac{1}{2}B(y + y_P) + \frac{1}{2}C(z + z_P) + D = 0}$$

adalah persamaan bidang singgung pada bola K dengan titik P sebagai titik singgungnya

Contoh:

Diketahui: Bola $K \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 10 = 0$

Ditanyakan: Persamaan bidang singgung pada bola K yang titik singgungnya adalah titik potong bola K dengan sumbu x

Jawab: Misal P adalah titik potong bola K dengan sumbu x maka

$$\begin{cases} x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 + 3x_P - 2y_P + 4z_P - 10 = 0 \\ y_P = 0, z_P = 0 \end{cases}$$

$$(x_P + 5)(x_P - 2) = 0$$

$$x_{P1} = -5; x_{P2} = 2$$

Jadi titik potong bola K dengan sumbu x adalah P_1(-5, 0, 0) dan P_2 (2, 0, 0). Misal V_1 adalah bidang singgung pada bola K dengan titik singgung P_1, maka persamaan bidang V_1 adalah -7x -2y +4z – 35 = 0, dan V_2. adalah bidang singgung pada bola K dengan titik singgung P_2 maka persamaan bidang V_2 adalah 7x – 2y + 4 z – 14 = 0

Soal:

1. Diketahui Bola $K \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z - 3 = 0$, dan titik-titik S (3, 2, 0) dan T (2, 3, 1)
   Tentukan persamaan bidang singgung pada bola K yang melalui titik S dan T
2. Diketahui Bola $L \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 4z - 5 = 0$

   Dan garis $k = \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Tentukan Persamaan bidang singgung pada bola L yang melalui garis *k*

C. Kuasa Pada Bola

Melalui titik P yang terletak di luar bola K dibuat garis g yang memotong bola K di titik-titik S dan T

Definisi: Yang dimaksud dengan kuasa titik P terhadap bola K adalah $PS \ x \ PT$

Tinjauan: Kuasa titik P terhadap bola K tersebut bernilai tetap, artinya tidak bergantung pada posisi garis *g* yang melalui P tersebut.

Perhatikan

Jika garis *g* melalui titik P, memotong bola K di titik-titik S dan T. Maka kuasa titik P terhadap bola K adalah PS.PT

Garis *l* melalui titik P, memotong bola K di titik-titik G dan H. Maka kuasa titik P terhadap bola K adalah PG.PH

Garis g dan l membentuk bidang W, yang memotong bola K pada lingkaran x
Titik-titik S,T,G, dan H terletak pada lingkaran x
Maka $\Delta PTG \sim \Delta PHS$
Jadi PG : PT = PS : PH atau PG.PH = PS.PT
Berarti kuasa titik P terhadap bola K bernilai tetap(tidak bergantung pada posisi garis g yang melalui P)

Perhatikan

Bola $K=(M,R)\equiv(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=R^2$
Garis PM memotong bola K di titik-titik A dan B
Maka kuasa titik P terhadap bola K adalah PA.PB
= (PM - MA).(PM + MB)
= (PM - R).(PM + R)
= $PM^2 - R^2$
= $(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2-R^2$

Kesimpulan

Kuasa titik P terhadap bola
$K=(M,R)\equiv(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=R^2$ adalah
$(x_P-x_M)^2+(y_P-y_M)^2+(z_P-z_M)^2=R^2$
Dengan uraian yang sama, jika bola K dinyatakan oleh persamaan $K\equiv x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ Maka kuasa titik P terhadap bola K adalah
$x_P^2+y_P^2+z_P^2+Ax_P+By_P+Cz_P+D=0$ (Selidikilah)

Kemungkinan

(i) Jika kuasa titik P terhadap bola K bernilai positif maka
$PM^2 - R^2 > 0$
$PM^2 > R^2$
$PM > R$
berarti titik P terletak di luar bola K
(ii) Jika kuasa titik P terhadap bola K bernilai negatif maka ttik P terletak di dalam bola K
(iii) Jika kuasa titik P terhadap bola K bernilai nol maka titik P terletak pada bola K

Soal:

Selidikilah posisi titik-titik berikutterhadap bola

$B \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3x + B - 2y + z - 6 = 0$

a. P(2,1,3) b. T(2,-3,5) c. S(-5,-1,1)

D. Bidang Kuasa

Himpunan titik yang berkuasa sama terhadap 2 bola adalah bidang datar yang disebut bidang kuasa 2 bola tersebut

Bukti: Bola K_1 dan K_2 dinyatakan oleh persamaan

$K_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$K_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Misal titik P berkuasa sama terhadap bola K_1 dan K_2 maka

$\mu(P, K_1) = \mu(P, K_2)$

$x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 + A_1x_P + B_1y_P + C_1z_P + D_1 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 + A_2x_P + B_2y_P + C_2z_P + D_2$

$A_1x_P + B_1y_P + C_1z_P + D_1 = A_2x_P + B_2y_P + C_2z_P + D_2$

$(A_1 - A_2)x_P + (B_1 - B_2)y_P + (C_1 - C_2)z_P + D_1 - D_2 = 0$

Himpunan titik yangberkuasa sama terhadap bola K_1 dan K_2 tersebut diperoleh jika koordinat titik P dijalankan

Maka didapat $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2)z + D_1 - D_2 = 0$ yang merupakan persamaan bidang datar dan disebut "Bidang Kuasa" bola K_1 dan K_2

Bidang kuasa diberi lambang $K_1 - K_2 = 0$ atau $K_1 = K_2$

E. Garis Kuasa

Jika diberikan 3 bola K_1, K_2, dan K_3. Himpunan titik yang berkuasa sama terhadap 3 bola tersebut merupakan garis lurus dan disebut "garis kuasa"

Garis kuasa itu diberi lambang

$$\left.\begin{array}{l} K_1 - K_2 = 0 \\ \\ K_1 - K_3 = 0 \end{array}\right\} K_1 = K_2 = K_3$$

F. Titik Kuasa

Jika diberikan 4 bola K_1, K_2, K_3, dan K_4. Titik yang berkuasa sama terhadap 4 bola tersebut disebut "titik kuasa"

Titik kuasa Diberi lambang

$$\left.\begin{array}{l} K_1 - K_2 = 0 \\ K_1 - K_3 = 0 \\ K_1 - K_4 = 0 \end{array}\right\} \text{atau} \quad K_1 = K_2 = K_3 = K_4$$

Contoh:

Diketahui: Bola L dan K dengan persamaannya

$$L \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z - 3 = 0$$

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + z - 2 = 0$$

Ditanyakan: Koordinat titik pada sumbu x yang berkuasa sama terhadap bola L dan K

Jawab:

Misal V = bidang kuasa bola L dan K

$$V \equiv L - K = (x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z - 3) - (x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + z - 2) = 0$$

$$V \equiv 2x + 2y - 3z - 1 = 0$$

Misal P titik potong bidang V dengan sumbu x, maka

$$\begin{cases} 2x_P + 2y_P - 3z_P - 1 = 0 \\ \quad y_P = 0, z_P = 0 \end{cases}$$

$$2x_P - 1 = 0 \Rightarrow x_P = \frac{1}{2}$$

Maka koordinat titik P adalah P($\frac{1}{2}$,0,0) dan P adalah titik pada sumbu x yang berkuasa sama terhadap bola L dan K

Soal:

1. Buktikanlah bahwa bidang kuasa tegak lurus garis sentral kedua bola tersebut
2. tentukanlah persamaan garis kuasa 3 bola

   $$K_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 6 = 0$$

   $$K_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z - 3 = 0$$

   $$K_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 4z - 3 = 0$$

3. Tentukanlah koordinat titik pada bidang xoy yang berkuasa sama terhadap 3 bola

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z - 4 = 0$$
$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z - 3 = 0$$
$$K_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 4z - 2 = 0$$

Kemungkinan

Posisi bidang kuasa ditentukan oleh posisi dari 2 bola tersebut

(I) Jika bola K_1 dan K_2 berpotongan pada lingkaran x maka bidang kuasa bola K_1 dan K_2 adalah bidang pemuat lingkaran x

Bukti:

Titik S pada lingkaran x, berkuasa nol terhadap bola K_1 dan K_2. Berarti titik-titik pada lingkaran x berkuasa nol terhadap bola K_1 dan K_2. Jadi titik-titik pada lingkaran x berkuasa sama terhadap bola K_1 dan K_2 atau lingkaran x terletak pada bidang kuasa bola K_1 dan K_2

(II) Jika bola K_1 dan K_2 bersinggungan di titik S maka bidang kuasa bola K_1 dan K_2 adalah bidang singgung persekutuan bola K_1 dan K_2 di titik singgung S (Buktikanlah)

(III) Jika bola K_1 dan K_2 saling lepas maka bidang kuasa bola K_1 dan K_2 juga tidak memotong bola K_1 dan K_2 tersebut (Tunjukanlah posisi bidang kuasa tersebut)

G. Berkas Bola

Jika dientukan bola-bola K_1 dan K_2 maka $\boldsymbol{K_1 + \lambda . K_2 = 0}$ juga merupakan persamaan bola

Bukti:

$$K_1 : x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$K_2 : x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$K_1 + \lambda K_2 = 0 \text{ untuk } \lambda \in \mathrm{R}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$
$$(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + (1+\lambda)z^2 + (A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{A_1 + \lambda A_2}{1+\lambda}x + \frac{B_1 + \lambda B_2}{1+\lambda}y + \frac{C_1 + \lambda C_2}{1+\lambda}z + \frac{D_1 + \lambda D_2}{1+\lambda} = 0$$

adalah persamaan bola .

Persamaan bola tersebut memuat $\lambda \in R$, jadi persamaan itu menyatakan bola yang tak hingga banyak dan disebut "**Berkas Bola**"
Untuk setiap nilai λ didapat satu persamaan bola dan merupakan anggota berkas, sedangkan K_1 dan K_2 disebut anggota dasar dari berkas bola itu

H. Sifat Berkas Bola

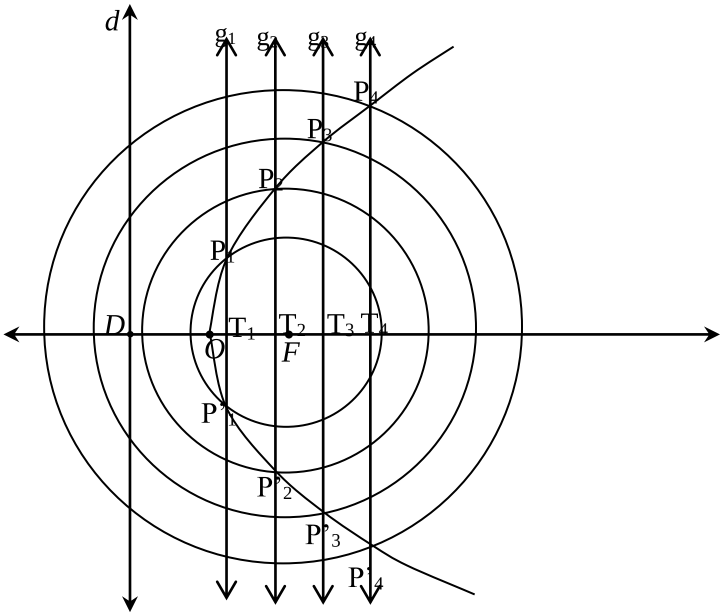
1. Sebuah berkas bola ditentukan oleh tiap-tiap dua anggotanya
2. Bidang kuasa anggota dasar merupakan bidang kuasa setiap dua anggota berkas
3. Berkas dari dua anggota berkas merpakan berkas yang ekivalen dengan berkas dari anggota dasarnya
4. Jika bola K_1 dan K_2 berpotongan pada lingkaran L, maka setiap anggota berkas akan melalui lingkaran L
5. Jika bola K_1 dan K_2 bersinggungan di titik T, maka setiap anggota berkas saling bersinggungan di titik T

BAB VII
PARABOLA

A. Melukis Parabola

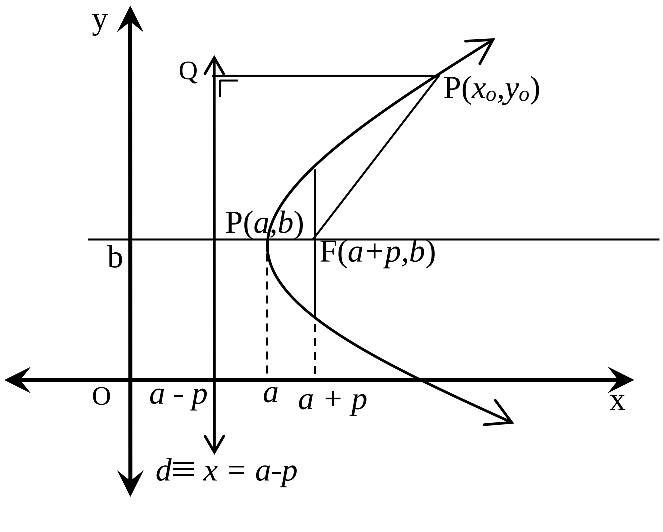
Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap titik tertentu (fokus) sama dengan jaraknya terhadap suatu garis tertentu (direktriks). Sesuai dengan definisi parabola tersebut maka dapat dilukis titik-titik pada parabola jika diketahui fokus (F) dan direktriks (d) dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Buat garis FD $\perp$ d (D adalah proyeksi F pada d), FD adalah sumbu simetri parabola (s)
2. Tentukan titik tengah segmen FD, kita beri nama O, sehingga OF=OD. Jadi O adalah salah satu titik pada parabola, dan O adalah puncak parabola.
3. Buatlah garis-garis g_1, g_2, g_3, ... di sebelah kanan O yang masing-masing tegak lurus sumbu simetri s dan memotong s berturut-turut pada titik T_1, T_2, T_3, ...
4. Buatlah lingkaran dengan pusat titik F dan jari-jari T_1D sehingga memotong g_1 pada titik P_1 dan $P_1^{'}$. Jelaslah $P_1F=T_1F=$ jarak (P_1,d) dan $P_1^{'}F=T_1D=$ jarak $\left(P_1^{'},d\right)$. Jadi titik-titik P_1 dan $P_1^{'}$ adalah titik-titik pada parabola.
5. Buatlah lingkaran dengan pusat titik F dan jari-jari T_2D sehingga memotong g_2 pada titik P_2 dan $P_2^{'}$. Jelaslah $P_2F=T_2D=$ jarak $\left(P_2,d\right)$ dan $P_2^{'}F=T_2D=$ jarak $\left(P_2^{'},d\right)$. Jadi titik-titik P_2 dan $P_2^{'}$ adalah titik-titik pada parabola.
6. Cara yang sama seperti langkah 4 dan langkah 5 untuk garis-garis g_3, g_4, g_5, ... maka kita peroleh titik-titik P_3, P_4, P_5, ... , $P_3^{'},P_4^{'},P_5^{'}$, ... adalah titik-titik pada parabola.
7. Hubungkan secara mulus dan berurutan mulai dari titik O dengan titik-titik P_1, P_2. P_3, ... dan dengan titik-titik $P_1^{'},P_2^{'},P_3^{'}$, ... maka akan kita peroleh sebuah bentuk garis lengkung yang disebut parabola.



Gb 1

B. Persamaan Parabola dengan Titik Puncak (a,b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu koordinat



Gb 2

Sesuai dengan definisi Parabola, yaitu tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap fokus sama dengan jaraknya terhadap direktriks. Perbandingan kedua jarak ini disebut eksentrisitas (e) dengan e=1.
Lihat gambar 1. Untuk *p>0,* persamaan parabola dengan puncak (a,b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu *x*,adalah:

$$e = \frac{PF}{PQ}$$

$$1 = \frac{PF}{PQ}$$

$$PQ = PF$$

$$\left|\frac{x_o - a + p}{\sqrt{1}}\right| = \sqrt{\left(x_o - (a+p)\right)^2 + \left(y_o - b\right)^2}$$

$$\left|x_o - a + p\right| = \sqrt{\left(x_o - (a+p)\right)^2 + \left(y_o - b\right)^2}$$

$$\left(x_o - a + p\right)^2 = \left(x_o - (a+p)\right)^2 + \left(y_o - b\right)^2$$

$$\left(x_o - (a-p)\right)^2 = \left(x_o - (a+p)\right)^2 + \left(y_o - b\right)^2$$

$$x_o{}^2 - 2x_o(a-p) + (a-p)^2 = x_o{}^2 - 2x_o(a+p) + (a+p)^2 + (y_o - b)^2$$

$$x_o{}^2 - 2x_o(a-p) + (a-p)^2 - x_o{}^2 + 2x_o(a+p) - (a+p)^2 = (y_o - b)^2$$

$$(a-p)^2 - (a+p)^2 - 2x_o(a-p) + 2x_o(a+p) = (y_o - b)^2$$

$$a^2 - 2ap + p^2 - \left(a^2 + 2ap + p^2\right) - 2x_o a + 2x_o p + 2x_o a + 2x_o p = (y_o - b)^2$$

$$a^2 - 2ap + p^2 - a^2 - 2ap - p^2 + 4x_o p = (y_o - b)^2$$

$$4x_o p - 2ap - 2ap = (y_o - b)^2$$

$$4x_o p - 4ap = (y_o - b)^2$$

$$4p(x_o - a) = (y_o - b)^2$$

$$(y_o - b)^2 = 4p(x_o - a)$$

Oleh karena titik (x_o, y_o) berjalan di sepanjang parabola, maka dapat diperoleh bentuk umum persamaan parabola dengan puncak (a,b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu *x*, adalah:

$\boxed{(y-b)^2 = 4p(x-a)}$ $\longrightarrow$ Parabola membuka ke kanan

atau

$\boxed{(y-b)^2 = -4p(x-a)}$ $\longrightarrow$ Parabola membuka ke kiri

Dengan cara yang sama dapat diperoleh persamaan parabola dengan puncak P(a,b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu y, maka akan diperoleh persamaan parabola:

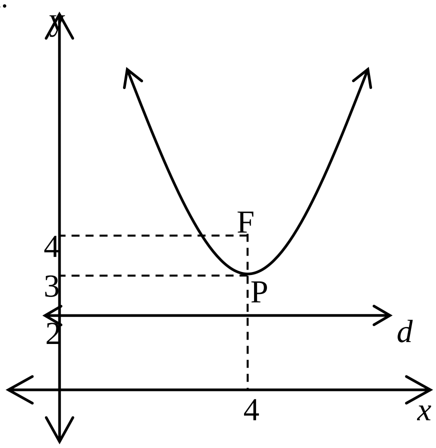
$\boxed{(x-b)^2 = 4p(y-b)}$ $\longrightarrow$ Parabola membuka ke atas

atau

$\boxed{(x-b)^2 = -4p(y-b)}$ $\longrightarrow$ Parabola membuka ke bawah

Pembuktiannya diberikan sebagai latihan.

Contoh:
Carilah persamaan parabola dengan titik puncaknya di P(4,3) dan fokusnya F(4,4)!
Jawab**:**
Puncak P(4,3), maka a = 4 dan b = 3.
Fokus F(4,4) = F(4,3+1), berarti p = 1 dan sumbu simetri sejajar sumbu y dan direktriks $d \equiv y = b - p = 3 - 1 = 2$. Untuk lebih jelasnya lihat sketsa di bawah ini.



Gb 3

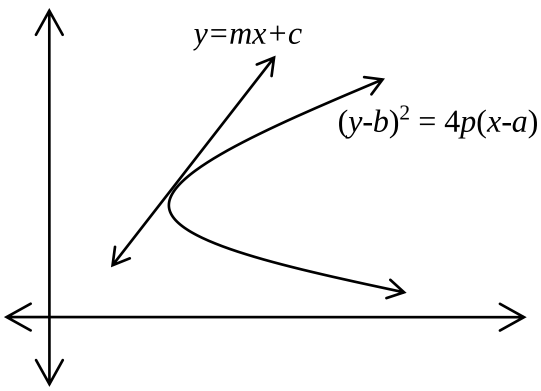
Kita tahu bahwa, jika puncak P(a,b) dan sumbu simetri sejajar sumbu y dengan fokus F($a,b+p$), maka persamaan parabola yang dicari adalah:

$$(x-a)^2 = 4p(y-b)$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 4.1(y-3)$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 4(y-3)$$

C. Persamaan Garissinggung Parabola Jika Diketahui Gradiennya

Kita akan mencari persamaan garissinggung terhadap parabola $(y-b)^2 = 4p(x-a)$

Misalkan garis dengan gradien m memiliki persamaan $g \equiv y = mx + c$. Perpotongan g dengan parabola $(y-b)^2 = 4p(x-a)$ dicari sebagai berikut:



Gb 4.

$$\begin{cases} (y-b)^2 = 4p(x-a) \\ y = mx + c \leftrightarrow x = \dfrac{y-c}{m} \end{cases}$$

maka $(y-b)^2 = 4p\left(\dfrac{y-c}{m} - a\right)$

$$m\left(y^2 - 2by + b^2\right) = 4p\left(y - c - am\right)$$
$$\leftrightarrow my^2 - 2mby + mb^2 = 4py - 4pc - 4pam$$
$$\leftrightarrow my^2 - 2mby + mb^2 - 4py + 4pc + 4pam = 0$$
$$\leftrightarrow my^2 - \left(2mb + 4p\right)y + mb^2 + 4pc + 4pam = 0$$

dengan Diskriminan:

$$D = \left(2mb + 4p\right)^2 - 4m\left(mb^2 + 4pc + 4pam\right)$$

Jika D<0, garis g tidak memotong parabola
Jika D>0, garis g memotong parabola pada dua titik
Jika D=0, garis g memotong parabola pada satu titik, berarti garis g menyinggung parabola.

Jadi syarat agar garis g menyinggung parabola adalah:

$$\left(2mb + 4p\right)^2 - 4m\left(mb^2 + 4pc + 4pam\right) = 0$$
$$4m^2b^2 + 16mbp + 16p^2 - 4m^2b^2 - 16mpc - 16pam^2 = 0$$
$$16mbp + 16p^2 - 16mpc - 16pam^2 = 0$$
$$mb + p - mc - am^2 = 0$$
$$mc = mb + p - am^2$$
$$c = \frac{mb + p - am^2}{m}$$

Substitusikan $c = \dfrac{mb + p - am^2}{m}$ ke persamaan $y = mx + c$ maka diperoleh:

$$y = mx + \frac{mb + p - am^2}{m}$$
$$\leftrightarrow ym = m^2x + mb + p - am^2$$
$$\leftrightarrow ym - mb = m^2x - am^2 + p$$
$$\leftrightarrow \left(y - b\right)m = m^2\left(x - a\right) + p$$
$$\leftrightarrow \left(y - b\right) = m\left(x - a\right) + \frac{p}{m}$$

Jadi, persamaan garissinggung dengan gradien m terhadap parabola $(y - b)^2 = 4p(x-a)$, adalah:

$$\boxed{(y-b) = m(x-a) + \frac{p}{m}}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh persamaan garissinggung dengan gradien m terhadap parabola:
$(y - b)^2 = -4p(x-a)$ adalah

$$\boxed{(y-b) = m(x-a) - \frac{p}{m}}$$

Jika persamaan parabola diketahui $(x - a)^2 = 4p(y-b)$ maka persamaan garissinggungnya adalah

$$\boxed{(y-b) = m(x-a) - m^2 p}$$

Jika persamaan parabola diketahui $(x - a)^2 = -4p(y-b)$ maka persamaan garissinggungnya adalah

$$\boxed{(y-b) = m(x-a) + m^2 p}$$

Contoh:
Carilah persamaan garissinggung parabola dengan gradien 3 terhadap parabola $(x+5)^2 = 8(y-2)$, kemudian cari titik singgungnya dan sketsalah grafiknya!
Jawab**:**
Dengan menggunakan rumus persamaan garissinggung dengan gradien m terhadap parabola $(x - a)^2 = 4p(y-b)$ adalah $y - b = m(x-a) - m^2 p$. Jadi persamaan garissinggung parabola dengan gradien 3 terhadap parabola $(x+5)^2 = 8(y-2)$, adalah:

$$y - b = m(x-a) - m^2 p$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = 3(x+5) - 3^2 \times 2$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = 3x + 15 - 18$$

$$\Leftrightarrow y = 3x - 1$$

Sekarang akan dicari titik singgung $y = 3x - 1$ terhadap parabola $(x+5)^2 = 8(y-2)$, adalah:

$$\begin{cases}(x+5)^2 = 8(y-2)\\ y = 3x-1\end{cases}$$

$(x+5)^2 = 8((3x-1)-2)$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = 8(3x-3)$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = 24x - 24$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 - 24x + 24 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0$

$\Leftrightarrow (x-7)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 7$

$y = 3x - 1$

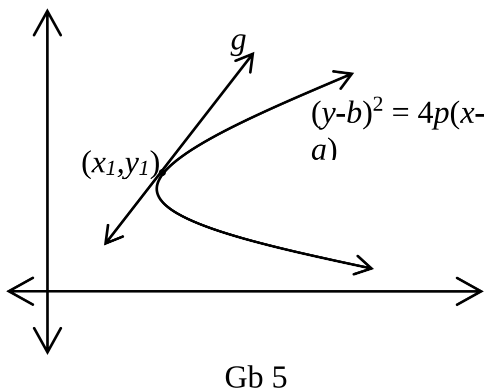
$\Leftrightarrow y = 3(7) - 1$

$\Leftrightarrow y = 20$

Jadi titik singgung parabola adalah (7,20)

D. Persamaan Garissinggung Parabola Melalui Titik Singgungnya

Misalkan parabola $(y-b)^2 = 4p(x-a)$ dengan titik $(x_1\ ,\ y_1)$ pada parabola. Akan dicari persamaan garis yang menyinggung parabola di titik $(x_1\ ,\ y_1)$. Misalkan persamaan garissinggung yang melalui titik $(x_1\ ,\ y_1)$ adalah $g \equiv y - y_1 = m(x - x_1)$ dengan m adalah gradien garis g. Perpotongan garis g dengan parabola adalah sebagai berikut:



Gb 5

$$\begin{cases} (y-b)^2 = 4p(x-a) \\ y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow x = \dfrac{y - y_1 + mx_1}{m} \end{cases}$$

Maka:

$$(y-b)^2 = 4p\left(\frac{y - y_1 + mx_1}{m} - a\right)$$

$$\Leftrightarrow my^2 - 2mby - 4py + 4py_1 - 4pmx_1 + 4pam + mb^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow my^2 - (2mb + 4p)y + 4py_1 - 4pmx_1 + 4pam + mb^2 = 0$$

Agar garis menyinggung parabola maka:

$$D = (2mb + 4p)^2 - 4m\left(4py_1 - 4pmx_1 + 4pam - mb^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2b^2 + 16mbp + 16p^2 - 16mpy_1 + 16pm^2x_1 16pam^2 - 4m^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1m^2 - am^2 + bm - y_1m + p = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - a)m^2 + (b - y_1)m + p = 0$$

Akan dicari gradien m sebagai berikut:

$$m = \frac{-(b - y_1) \pm \sqrt{(b - y_1)^2 - 4p(x_1 - a)}}{2(x_1 - a)}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{y_1 - b \pm \sqrt{(b - y_1)^2 - (b - y_1)^2}}{2(x_1 - a)}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{y_1 - b}{2(x_1 - a)}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{y_1 - b}{2\left(\dfrac{(y_1 - b)^2}{4p}\right)}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{2p}{y_1 - b}$$

Substitusi m ke persamaan garis $g \equiv y - y_1 = m(x - x_1)$ maka akan diperoleh persamaan garissinggung pada parabola adalah:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1 - b}(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow (y - y_1)(y_1 - b) = 2p(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow (y - y_1 - b + b)(y_1 - b) = 2p(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow (y - b - y_1 + b)(y_1 - b) = 2p(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow ((y - b) - (y_1 - b))(y_1 - b) = 2p(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow (y - b)(y_1 - b) - (y_1 - b)^2 = 2p(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow (y - b)(y_1 - b) = 2p(x - x_1) + (y_1 - b)^2$$
$$\Leftrightarrow (y - b)(y_1 - b) = 2p(x - x_1) + 4p(x - a)$$
$$\Leftrightarrow (y - b)(y_1 - b) = 2p(x - x_1 + 2x - 2a)$$
$$\Leftrightarrow (y - b)(y_1 - b) = 2p(x - x_1 + 2x - 2a)$$
$$\Leftrightarrow (y - b)(y_1 - b) = 2p(x + x - 2a)$$

Jadi persamaan garissinggung di titik (x_1 , y_1) pada parabola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ adalah $\boxed{(y - b)(y_1 - b) = 2p(x + x - 2a)}$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh persamaan garissinggung pada parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ adalah $\boxed{(x_1 - a)(x - a) = 2p(y + y_1 - 2b)}$

Contoh:

Carilah persamaan garissinggung terhadap parabola $x^2 = 25y$ yang melalui titik absis 5 pada parabola!

Jawab:

Titik absis parabola x = 5 maka titik ordinatnya y = 1, dengan $p = \frac{25}{4}$

Menurut rumus persamaan garissinggung terhadap parabola $x^2 = 4py$ yang melalui (5,1) maka rumus persamaan garissinggungnya adalah:

$$x_1x = 2p(y + y_1)$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2 \times \frac{25}{4}(y+1)$$
$$\Leftrightarrow 5x = \frac{25}{2}(y+1)$$
$$\Leftrightarrow 5x - \frac{25}{2}y - \frac{25}{2} = 0$$

Soal:

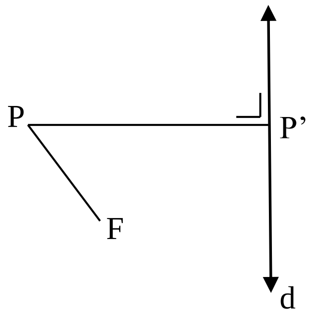
1. Jika diketahui suatu parabola dengan titik puncak P(0,0), fokus F(0,-3). carilah:

   b. Persamaan direktriksnya
   c. Persamaan parabolanya
   d. Sifat-sifat parabola tersebut
   e. Lukis grafik parabola tersebut
2. Jika diketahui suatu parabola dengan titik puncak P(-2,-5) fokus F(-4,-5). carilah:
   a. Persamaan direktriksnya
   b. Persamaan parabolanya
   c. Sifat-sifat parabola tersebut
   d. Lukis grafik parabola tersebut
3. Carilah persamaan garissinggung parabola dengan gradien m = -2 dengan parabola yang titik fokusnya F(0,0) dan puncak P(3,0)
4. Carilah persamaan garissinggung terhadap parabola $(y-4)^2 = 12(x+8)$ yang melalui absis -8!
5. Diketahui persamaan parabola $L \equiv 5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y - 4 = 0$. Tentukan titik puncak, titik pusat, titik focus, eksentrisitas, sumbu simetri dan persamaan direktriks dari parabola tersebut.
6. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $(y-2)^2 - 8(x-3)^2 = 8$ yang membentuk sudut α terhadap sumbu x positif dengan Sin $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (α lancip).
7. Diketahui A(3,4) dan F_1 dan F_2 adalah focus hiperbola $16x^2 - 9y^2 = 144$. Tentukan luas ΔAF_1F_2.

BAB VIII
ELLIPS

A. Definisi Ellips

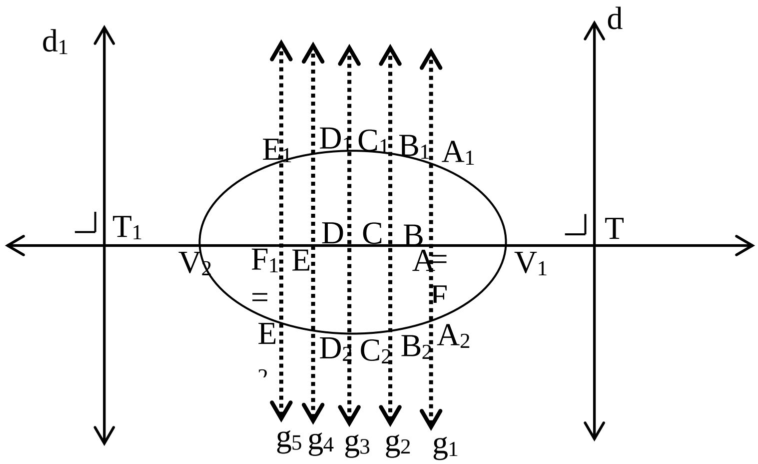
Ellips ialah tempat kedudukan titik–titik yang perbandingan jarak ke titik tertentu (fokus F) dan terhadap garis tertentu (direktriks d) tetap, yaitu sama dengan e dan $e < 1$ (e = eksentrisitas)



Perhatikan Gb 1
F = fokus
d = direktriks
PP′= jarak P ke direktriks d
P pada ellips, maka $\frac{PF}{PP'} = e$ dengan $e < 1$

Gambar 1

B. Melukis Ellips



Gambar 2

CATATAN :

Jika direktriks d_1 di sebelah kiri V_2 dan berjarak dua satuan, maka fokus F_1 pada FT dengan : $\frac{V_2F_1}{V_2T_1} = \frac{1}{2}$ maka akan menghasilkan ellips. Jadi setiap ellips memiliki dua fokus dan dua direktriks.

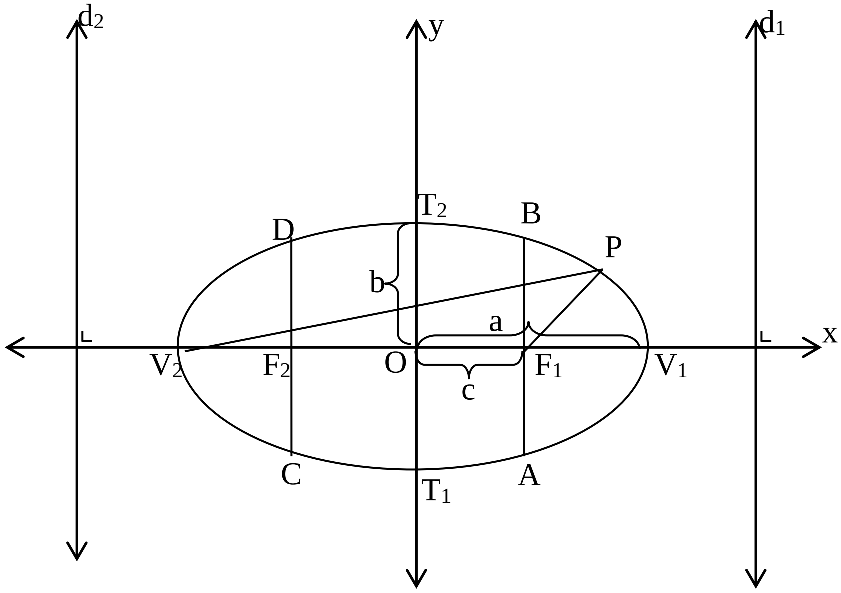
Langkah – langkah melukis ellips (perhatikan Gambar 2) :

1. Buat garis TT_1 yang tegak lurus dengan d_1 dan d_2.
2. Tentukan titik V_1 dan V_2 pada garis TT_1, sedemikian sehingga : $\frac{V_1F}{V_1T} = \frac{1}{2}$ dan $\frac{V_2F_1}{V_2T_1} = \frac{1}{2}$. Jadi titik V_1 dan V_2 pada ellips.
3. Buatlah garis – garis g_1, g_2, g_3, g_4, dan g_5 masing – masing sejajar d dan memotong garis FT berturut – turut pada A=F, B, C, D, dan E=F_1.
4. Buatlah lingkaran (F,$\frac{1}{2}AT$) sehingga memotong g_1 di A_1 dan A_2. Jadi

   $\frac{A_1F}{A_1T} = \frac{A_2F}{A_2T} = \frac{1}{2}$ Maka titik A_1 dan A_2 terletak pada ellips.
5. Buatlah lingkaran (F,$\frac{1}{2}BT$) sehingga memotong g_1 di B_1 dan B_2. Jadi

   $\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{B_2F}{B_2T} = \frac{1}{2}$ Maka titik B_1 dan B_2 terletak pada ellips.
6. Lakukan langkah 4 dan langkah 5 sehingga diperoleh titik – titik C_1, C_2, D_1, D_2, E_1 dan E_2 yang semuanya terletak pada ellips.
7. Hubungkan titik – titik yang diperoleh dari langkah 2, langkah 4, langkah 5 dan langkah 6 sehingga akan diperoleh lengkungan tertutup yang disebut dengan ellips (dengan $e = \frac{1}{2}$).

Istilah – istilah pada ellips :



Gambar 3

Perhatikan Gambar 3

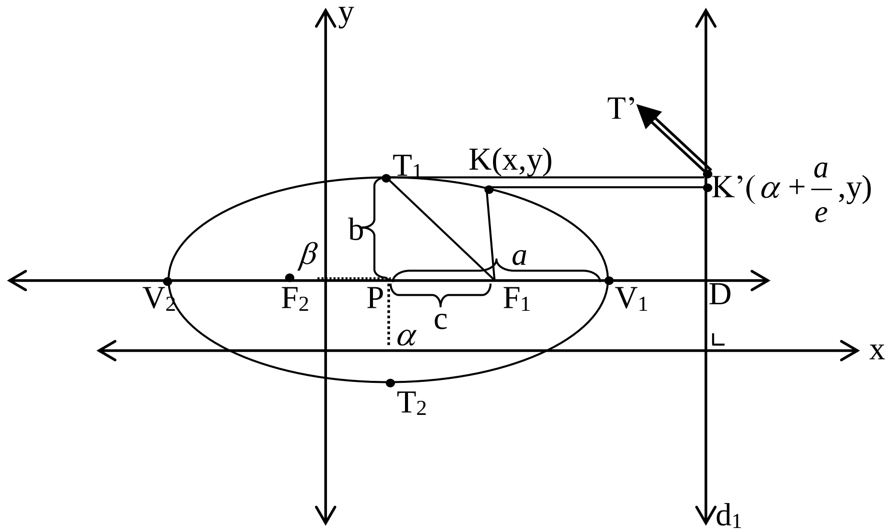
1. F_1 dan F_2 disebut *fokus*.
2. d_1 dan d_2 adalah *direktriks*. Jika P pada ellips, maka $\dfrac{PF_1}{jarak\ (P,d_1)} = \dfrac{PF_2}{jarak\ (P,d_2)} = e$ (e = eksentrisitas, dengan $e < 1$)
3. V_1, V_2, T_1, dan T_2 adalah ***puncak*** ellips.
4. O adalah ***pusat*** ellips, $OV_1 = OV_2 = a$, $OF_1 = OF_2 = c$, $OT_1 = OT_2 = b$
5. $\overleftrightarrow{V_1V_2}$ dan $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ disebut ***sumbu simetri***. Sumbu simetri yang memuat fokus disebut ***sumbu panjang*** ($\overline{V_1V_2}$), dengan $V_1V_2 = 2a$. Sumbu simetri yang tidak memuat fokus disebut ***sumbu pendek*** ($\overline{T_1T_2}$, dengan $T_1T_2 = 2b$.
6. Tali busur yang melalui fokus disebut ***tali busur fokus***.
7. Tali busur fokus yang tegak lurus sumbu panjang disebut ***latus rectum***. Dalam hal ini $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ adalah lotus rectum.

8. Segmen penghubung fokus dengan titik pada ellips disebut ***jari–jari fokus***.

C. Persamaan Umum Ellips

Misalkan diketahui pusat dari ellips yaitu P(α,β), sumbu panjang terletak pada pada sumbu *x*, sumbu pendek terletak pada sumbu *y*, fokus F_1(α+c,β), *a* adalah setengah sumbu panjang, *b* adalah setengah sumbu pendek, dan *e* adalah eksentrisitas ellips. Persamaan umum ellips dapat dicari dari keterangan yang diketahui tersebut.

Perhatikan Gambar 4



Gambar 4

Keterangan :

P (α,β)	T_1 (α,β+*b*)
F_1 (α+c,β)	T_2 (α,β-*b*)
F_2 (α-c,β)	

1. Mencari Persamaan Direktriks

PF_1 = c dan PV_1 = a (a > c)

V_1 (α+ a ,β) dan *V_2 (α- a ,β)* pada ellips, sehinggga:

$$\frac{V_1F_1}{V_1D} = e \rightarrow \frac{a-c}{PD-a} = e \rightarrow a - c = e\,(PD - a) \quad \ldots\ldots\ldots 1$$

$$\frac{V_2F_1}{V_2D} = e \rightarrow \frac{a+c}{PD+a} = e \rightarrow a + c = e\,(PD + a) \text{ .... } 2$$

Persamaan 1 dan 2 dijumlahkan, maka diperoleh :

$2a = 2e\ PD \rightarrow a = e\,PD \rightarrow PD = \frac{a}{e}$

Persamaan 1 dan 2 dikurangkan, maka diperoleh :

$2c = 2e\ a \Rightarrow c = e\ a$

$\text{Jadi persamaan direktriks } d1 \text{ adalah } x = \alpha + \frac{a}{e}$

2. Mencari hubungan antara a, b, c, dan e

$$\frac{T_1F_1}{T_1T^1} = \frac{T_1F_1}{PD} = e \rightarrow T_1F_1 = ePD = e\frac{a}{e} = a$$

$$(PT_1)^2 = (T_1F_1)^2 - (PF_1)^2 \leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \leftrightarrow b^2 = a^2 - a^2e^2$$
$$\leftrightarrow b^2 = a^2(1 - e^2)$$

3. Menemukan kembali persamaan umum ellips

Misalkan titik $K(x,y)$ pada ellips dan KK'adalah jarak K ke direktriks d_1, maka $K'\left(\alpha + \frac{a}{e}, y\right)$.

$$\frac{F_1K}{KK'} = \mathrm{e} \leftrightarrow F_1K = e(KK')$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-\alpha-c)^2 + (y-\beta)^2} = e\sqrt{\left(x-\alpha-\frac{a}{e}\right)^2 + (y-y)^2}$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 - 2c(x-\alpha) + c^2 + (y-\beta)^2 = e^2\left((x-\alpha)^2 - \frac{2a}{e}(x-\alpha) + \frac{a^2}{e^2} + 0\right)$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - 2c(x-\alpha) + c^2 = e^2(x-\alpha)^2 - 2ae(x-\alpha) + a^2$$

$$\Rightarrow (1-e^2)(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2 - c^2 + 2c(x-\alpha) - 2ae(x-\alpha)$$

$$\Rightarrow (1-e^2)(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2 - c^2 - 2(x-\alpha)(ae-c)$$

$$\Rightarrow (1-e^2)(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2 - c^2 - 2(x-\alpha)(ae-ae)$$

$$\Rightarrow (1-e^2)(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2 - c^2$$

$$\Rightarrow (1-e^2)(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2(1-e)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Dengan cara yang sama seperti di atas untuk direktriks d_2 dan fokus F_2 akan diperoleh: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$.

Jadi persamaan umum ellips dengan pusat P(α, β) dan sumbu-sumbunya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat dengan $a > b$, adalah:

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1} \quad \rightarrow \quad \text{Ellips Horizontal}$$

Dengan cara yang sama, maka persamaan umum ellips dengan pusat P(α, β) dan sumbu-sumbunya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat dengan $a < b$, adalah:

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1} \quad \rightarrow \quad \text{Ellips Vertikal}$$

Jika pusat dari ellips P(0,0) dan $a > b$, maka persamaan umum ellips adalah:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \rightarrow \quad \text{Ellips Horizontal}$$

Jika pusat dari ellips P(0,0) dan $a < b$, maka persamaan umum ellips adalah:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \quad \rightarrow \quad \text{Ellips Vertikal}$$

Istilah– istilah dan sifat – sifat pada ellips dengan pusat P(α,β) adalah sebagai berikut:

1. Titik Pusat di (α,β)
2. Fokus F_1 ($\alpha+c,\beta$) dan F_2 ($\alpha-c,\beta$) dengan a>b dan $c^2 = a^2 - b^2$
   Jika $a <$ b dan $c^2 = b^2 - a^2$,maka F_1 ($\alpha,\beta+c$) dan F_2 ($\alpha,\beta-c$)
3. Eksentrisitas $e = \frac{c}{a}$ jika $a > b$, dan $e = \frac{c}{b}$ jika $a < b$
4. Direktriks $d_1 \equiv x = \alpha+\frac{a}{e}$ dan $d_2 \equiv x = \alpha-\frac{a}{e}$ (jika $a > b$)
   $d_1 \equiv y = \beta+\frac{b}{e}$ dan $d_2 \equiv y = \beta-\frac{b}{e}$ (jika $a < b$)
5. Sumbu x dan sumbu y adalah sumbu simetri, dan jika $a > b$ maka sumbu x adalah sumbu panjang dan sumbu y adalah sumbu pendek, jika $a < b$ maka sumbu x adalah sumbu pendek dan sumbu y adalah sumbu panjang.
6. Lotus rectum $x = \alpha + c$ dan $x = \alpha - c$ jika sumbu x adalah sumbu panjang. Jika sumbu y sumbu panjang maka $y = \beta + c$ dan y = β - c adalah lotus rectum.
7. Titik puncak ellips, yaitu titik potong ellips dengan sumbu–sumbu simetrinya, yaitu $(a+\alpha,\beta)$, $(\alpha-a,\beta)$, $(\alpha, b+\beta)$ dan $(\alpha,\beta-b)$.

Contoh:

Diketahui ellips dengan persamaan $100(x-1)^2 + 36(y-2)^2 = 225$.

Tentukanlah :

a. Koordinat titik pusat, koordinat titik puncak, dan koordinat fokus,
b. Panjang dari sumbu mayor (sumbu panjang) dan sumbu minor (sumbu pendek),

c. Eksentrisitas dan persamaan direktriks,
Kemudian gambarlah sketsa ellips tersebut!

Jawab:

$100(x-1)^2 + 36(y-2)^2 = 225$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{\frac{9}{4}} + \dfrac{(y-2)^2}{\frac{25}{4}} = 1$

karena $a = \frac{3}{2} < b = \frac{5}{2}$, maka merupakan ellips yang vertikal.

Dicari hubungan : $c^2 = b^2 - a^2 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{4} = 4$, maka c = 2

a. Koordinat titik pusat P (1,2)

Koordinat titik puncak $(\frac{3}{2}+1,2)$, $(1-\frac{3}{2},2)$, $(1,\frac{5}{2}+2)$ dan $(1, 2-\frac{5}{2})$

$(\frac{5}{2},2)$,$(-\frac{1}{2},2)$, $(1,\frac{9}{2})$ dan $(1,-\frac{1}{2})$

Koordinat fokus $F_1(1,2+2)$ dan $F_2(1,2-2) \Rightarrow F_1(1,4)$ dan $F_2(1,0)$

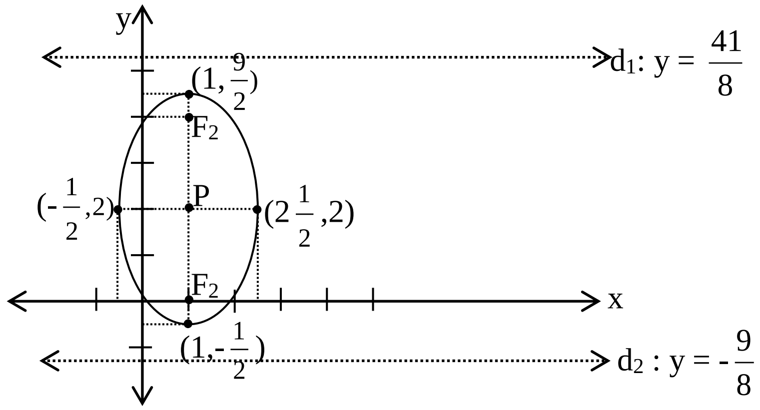
b. Panjang dari sumbu mayor (sumbu panjang) = $2b = 5$ dan panjang dari sumbu minor (sumbu pendek) = $2a = 3$

c. Eksentrisitas $e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2}{\frac{5}{2}} = \dfrac{4}{5}$

Persamaan direktriks : $d_1 \equiv y = 2 + \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{4}{5}} = 2 + \dfrac{25}{8} = \dfrac{41}{8}$

$d_2 \equiv y = 2 - \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{4}{5}} = 2 - \dfrac{25}{8} = -\dfrac{9}{8}$

Gambar sketsa ellips tersebut:



D. Persamaan Garissinggung Ellips

1. Persamaan Garissinggung Ellips Jika Diketahui Gradiennya

Misalkan persamaan garis dengan gradien m adalah y = mx + p dan persaman ellips : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Absis titik potong antara garis dan ellips diperoleh dari :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+p)^2}{b^2}=1$$

ii. $b^2 x^2 + a^2 (mx+p)^2 = a^2 b^2$

iii. $b^2 x^2 + a^2 (m^2 x^2 + 2mxp + p^2) = a^2 b^2$

iv. $(b^2 + a^2 m^2) x^2 + 2a^2mpx + a^2p^2 - a^2 b^2 = 0$ ....(1)

Karena garis y = mx + p akan menyinggung ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ maka titik potongnya harus berimpit. Hal ini terjadi jika diskriminan dari persamaan (1) sama dengan 0

$D = (2a^2mp)^2 - 4 (b^2 + a^2 m^2) (a^2p^2 - a^2 b^2) = 0$

$\Leftrightarrow 4a^4m^2p^2 - 4 b^2 a^2p^2 + 4 b^4a^2 - 4 a^4m^2p^2 + 4a^4b^2m^2 = 0$

$\Leftrightarrow -4 b^2 a^2p^2 + 4 b^4a^2 + 4a^4b^2m^2 = 0$

$\Leftrightarrow -p^2 + b^2 + a^2m^2 = 0$

$\Leftrightarrow p^2 = b^2 + a^2m^2$

$\Leftrightarrow$ p $= \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$

Jadi persamaan garissinggung dari persamaan ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah :

$$\boxed{y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh :

Persamaan garis singgung pada ellips yang berpusat P(α,β) : : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah

$$\boxed{y - \beta = m(x - \alpha) \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}}$$

2. Persamaan Garissinggung Ellips Jika Diketahui Titik singgungnya

Selanjutnya, kita akan mencari persamaan garissinggung pada ellips dengan titik singgungnya $T(x_1,y_1)$.

Misalkan persamaan ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan P (x_2,y_2) merupakan suatu titik pada ellips, maka berlaku:

$\frac{x_2^{\,2}}{a^2} + \frac{y_2^{\,2}}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2$..(2)

Karena $T(x_1,y_1)$ pada ellips, maka berlaku : $\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^2} = 1$ atau

$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$..(3)

Dari persamaan (2) dan (3) diperoleh :

$b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2$

$\Leftrightarrow -b^2(x_1^2 - x_2^2) = a^2(y_1^2 - y_2^2)$

$\Leftrightarrow -b^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = a^2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$

$\Leftrightarrow \frac{-b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} = \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$ ....(4)

Persamaan garis *PT* adalah $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ ....(5)

Dari persamaan (4) dan (5), maka diperoleh :

$$y - y_1 = \frac{-b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1) \quad ....(6)$$

Jika P mendekati T sedemikian sehingga P *berimpit* dengan T, maka $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$. Sehingga persamaan (6) menjadi :

$$y - y_1 = \frac{-b^2}{a^2}\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1)$$

$\Leftrightarrow$ $(y - y_1)\, a^2 y_1 = -b^2 x_1 (x - x_1)$

$\Leftrightarrow$ $a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2$

$\Leftrightarrow$ $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$

$\Leftrightarrow$ $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$ ....(7)

Karena $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ maka persamaan (7) menjadi : $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

Jadi persamaan garissinggung pada ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan titik singgungnya $T(x_1,y_1)$ adalah: $\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1}$

Untuk ellips yang persamaanya: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$, persamaan garissinggungnya dengan titik singgung (x_1,y_1) adalah:

$$\boxed{\frac{(x_1 - \alpha)(x - \alpha)}{a^2} + \frac{(y_1 - \beta)(y - \beta)}{b^2} = 1}$$

3. Persamaan Garissinggung Ellips Melalui Satu Titik Di Luar Ellips

Selanjutnya kita akan mencari persamaan garissinggung pada ellips yang melalui titik $T(x_0,y_0)$ di luar ellips.

Misalkan persamaan ellipsnya : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dan titik A (x′, y′) suatu titik singgung.

Persamaan garissinggung di A adalah : $\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$

Karena titik A pada ellips maka memenuhi $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$ ....(8)

Karena garis singgung melalui T maka memenuhi $\frac{x'x_0}{a^2}+\frac{y'y_0}{b^2}=1$ ...(9)

Dari persamaan (8) dan (9) dapat dicari x' dan y' sehingga kita memperoleh persamaan garis singgungnya.

Contoh:

Garis y = x$\sqrt{6}$ memotong ellips $x^2+4y^2-16=0$ pada dua titik. Carilah persamaan garis singgung di titik – titik potong tersebut !

Jawab:

$x^2+4y^2-16=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

Koordinat titik potong garis dengan ellips dicari sebagai berikut :

$$\begin{cases} x^2+4y^2-16=0 \\ y=x\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4(x\sqrt{6})^2-16=0 \\ y=x\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+24x^2=16 \\ y=x\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{16}{25} \\ y=x\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}\, dan\, y=\frac{4}{5}\sqrt{6}$$ atau

x = $-\frac{4}{5}\, dan\ y=-\frac{4}{5}\sqrt{6}$

Jadi titik potong antara garis dengan ellips adalah di titik $(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\sqrt{6})$ dan $(-\frac{4}{5},-\frac{4}{5}\sqrt{6})$.

Persamaan garissinggung di titik $(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\sqrt{6})$ adalah $\frac{\frac{4}{5}x}{16}+\frac{\frac{4}{5}\sqrt{16}y}{4}=1 \quad \Leftrightarrow x+4\sqrt{6}y=20$, dan persamaan garissinggung di titik $(-\frac{4}{5},-\frac{4}{5}\sqrt{6})$ adalah $x+4\sqrt{6}y=20$

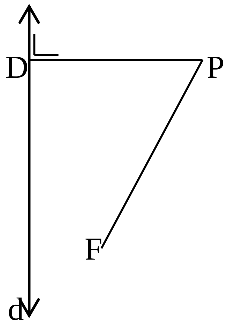
SOAL

1. Sebuah ellips berpusat di titik (4,-1), salah satu fokusnya mempunyai koordinat (1,-1), dan melalui titik (8,0). Tentukan persamaan ellips dan gambarkan sketsa ellips tersebut!
2. Titik P terletak pada ellips $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ dan absis titik P sama dengan ordinat titik P.
   a. Tentukan koordinat titik P,
   b. Tentukan persamaan garissinggung ellips yang melalui titik P.
3. Tentukan persamaan garissinggung pada ellips $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$ yang membentuk sudut 60° terhadap sumbu X positif !

BAB IX
HIPERBOLA

A. Definisi Hiperbola

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya terhadap suatu titik tertentu (fokus F) dan suatu garis tertentu (direktriks d) tetap (sama dengan e) yaitu lebih besar dari 1 (e >1)



Keterangan:

$$\frac{PF}{PD} = e$$

dengan e > 1

B. Melukis Hiperbola

Misalkan ditentukan direktriks d_1 dan F_1 yang berjarak 3 satuan ke d_1. Bagaimana melukis hiperbola dengan eksentrisitas e = 2?

Langkah-Langkah Melukis Hiperbola:

a. Tentukan titik T_1 pada d_1 , dan T_1 berjarak 3 satuan ke F_1, tarik garis F_1T_1 yang tegak lurus d_1. Tentukan V_1 dan V_2 pada ruas garis F_1T_1, sedemikian sehingga
$\frac{V_1F_1}{V_1T_1} = 2$ dan $\frac{V_2F_1}{V_2T_1} = 2$
Jadi V_1 dan V_2 pada hiperbola

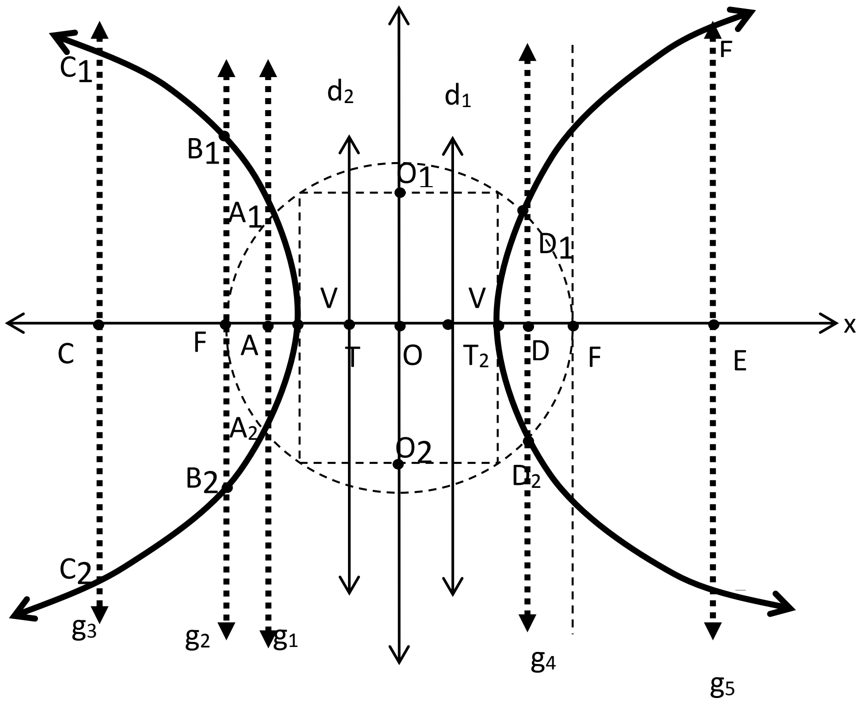
b. Buat garis g_1, g_2, g_3, g_4, dan g_5, masing-masing sejajar d_1 dan memotong garis F_1T_1 berturut-turut pada A, B (B = F_1), C, D, dan E.
Catatan:
Semakin banyak garis g lukisan hiperbola semakin baik

c. Buat lingkaran (F_1, $2AT_1$) sehingga memotong g_1 di A_1 dan A_2, maka diperoleh $\frac{A_1F_1}{AT_1} = \frac{A_2F_1}{AT_1} = 2$ maka A_1 dan A_2 pada hiperbola.

d. Buat lingkaran (F_1, $2BT_1$) sehingga memotong g_1 di B_1 dan B_2, maka diperoleh $\frac{B_1F_1}{BT_1} = \frac{B_2F_1}{BT_1} = 2$ maka B_1 dan B_2 pada hiperbola.

Lanjutkan seperti langkah 4 dan 5 sehingga akan diperoleh titik-titik C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, dan E_2 yang kesemuanya terletak pada hiperbola.

e. Hubungkan titik-titik yang diperoleh pada langkah a, langkah c, dan langkah d, secara mulus maka akan diperoleh dua buah lengkungan terbuka yang disebut hiperbola



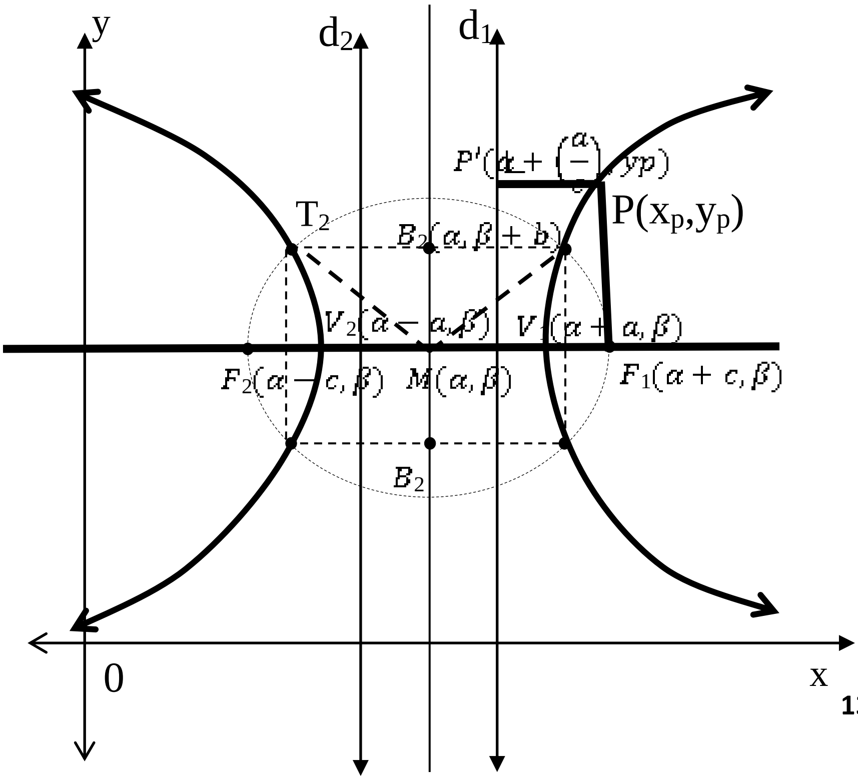
Keterangan:
1. F_1 dan F_2 disebut ***fokus***
2. d_1 dan d_2 adalah ***direktriks*** . Jika P pada hiperbola maka

$$\frac{PF_1}{jarak\ (P, d_1)} = \frac{PF_1}{jarak\ (P, d_2)}$$

e = ***eksentrisitas***, dengan e > I

3. V_1 dan V_2 disebut ***puncak hiperbola***
4. O adalah ***titik pusat hiperbola***
   dengan $OF_1 = OF_2 = c$
5. Garis yang melalui focus dan puncak hiperbola disebut ***sumbu simetri***.
   a. Sumbu simetri yang memuat fokus dan puncak hiperbola disebut ***sumbu utama*** atau ***sumbu nyata*** atau ***sumbu transversal***.
      $V_1V_2 = 2a$ disebut ukuran sumbu utama ($OV_1 = OV_2 = a$).
   b. Sumbu simetri yang memuat pusat hiperbola dan puncak disebut ***sumbu sekawan*** atau ***sumbu imajiner*** atau ***sumbu konjugasi***.
      $O_1O_2 = 2b$ disebut ukuran sumbu imajiner/pendek/minor
6. Ruas garis yang melalui titik fokus dan tegak lurus sumbu utama memotong hiperbola disebut ***latus rectum hiperbola***

C. Persamaan Hiperbola dengan Pusat M(α, β)



Diketahui $MF_1 = c$ dan $MV_1 = a$ dengan $a < c$.

V_1 pada hiperbola maka $\frac{V_1F_1}{V_1D} = e \leftrightarrow \frac{c-a}{a-MD} = e$

$\leftrightarrow c - a = ae - eMD$…………… (1)

V_2 pada hiperbola maka $\frac{V_2F_1}{V_2D} = e \leftrightarrow \frac{a+c}{a+MD} = e$

$\leftrightarrow c + a = ae + e\,MD$………….. (2)

Dari persamaan (1) dan persamaan (2) saling dieliminasi sehingga diperoleh $c = ae$ dan jarak $MD = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$

$F_1(\alpha + c,\beta) = F_1(\alpha + ae,\beta)$ dan direktriks d_1 memiliki persamaan $x = a + \frac{a}{e}$

hubungan antara a, b, c dan e dapat dicari sebagai berikut :

ΔMV_1T_1 siku-siku di V_1 maka :

$T_1V_1^2 = MT_1^2 - MV_1^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2(e^2 - 1)$

akan dicari persamaan hiperbola dengan sifat–sifat seperti diatas.

Misal titik P (x_p, y_p) pada hiperbola yang berpusat di $M(\alpha, \beta)$ dan PP′ adalah jarak P ke direktris d_1, dengan P′ proyeksi P pada d_1 maka

Tentu P′ $\left[\alpha + \frac{a}{e}, y_p\right]$, sehingga

$$\frac{PF_1}{PP'} = e \leftrightarrow PF_1 = ePP'$$

$$\leftrightarrow (PF_1)^2 = e^2(PP')^{2y}$$

$$\leftrightarrow (\alpha + c - x_p)^2 + (\beta - y_p)^2 = e^2\left\{\left(\alpha + \frac{a}{e} - x\right)^2\right\}$$ *dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan*

$$\leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha c - 2\alpha x - 2cx + x^2 + c^2 + \beta^2 - 2\beta y + y^2 = e^2\left(\alpha^2 + 2\alpha\frac{a}{e} - 2\alpha x - 2\frac{a}{e}x + \frac{a^2}{e^2} + x^2\right)$$

$\leftrightarrow\ \alpha^2 + 2\alpha c - 2\alpha x - 2cx + x^2 + c^2 + \beta^2 - 2\beta y + y^2 = a^2e^2 + 2\alpha ae - 2\alpha ae^2x - 2aex + a^2 + e^2x^2$

$\Leftrightarrow$ $e^2x^2 - x^2 - 2\alpha e^2x + 2\alpha x + \alpha^2e^2 - \alpha^2 + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) = 2\alpha ae - 2cx - 2aex + 2\alpha c + c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow$ $(e^2 - 1)(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2) - (y^2 - 2\beta y + \beta^2) = 2\alpha ae - 2aex - 2aex + 2\alpha ae + c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow$ $(e^2 - 1)(x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2 = c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow$ $\left\{\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right\}(x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2 = b^2$

$\Leftrightarrow$ $a^2 (x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2 = b^2$ diketahui $b^2 = c^2 - a^2$

$\leftrightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ dengan membagi b^2 kedua ruas persamaan

$\leftrightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ adalah persamaan hiperbola dengan M (α, β)

dengan sumbu utama sejajar sumbu x dan mempunyai sifat-sifat hiperbola ini adalah :

(a) panjang sumbu mayor 2a dan panjang sumbu minor 2b
(b) Persamaan sumbu utama atau sumbu nyata adalah $y = \beta$ dan persamaan sumbu sekawan atau sumbu imajiner adalah $x = \alpha$
(c) Koordinat titik-titik puncak : $V_2(\alpha - a, \beta)$ dan $V_1(\alpha + a, \beta)$, koordinat titik ujung sumbu minor: $B_1(\alpha, \beta - b)$ dan $B_2(\alpha, \beta + b)$
(d) Koordinat titik-titik fokus: F_2 $(\alpha - c, \beta)$dan F_1 $(\alpha + c, \beta)$
(e) Nilai eksentrisitas $e = \frac{c}{a}$
(f) Persamaan direktriks: $d_1 \equiv x = \alpha + \frac{a}{e}$ dan $d_2 \equiv x = \alpha - \frac{a}{e}$
(g) Persamaan asimtot: $l_1 \equiv (y - \beta) = \frac{b}{a}(x - \alpha)$ dan

$$l_2 \equiv (y - \beta) = -\frac{b}{a}(x - \alpha)$$

(h) Latus rectum $x = \alpha - c$ dan $x = \alpha + c$

(i) Panjang latus rectum = $\frac{2b^2}{a}$

Analog dengan cara yang sama seperti di atas untuk direktriks d_1 dan fokus F_1 akan diperoleh persamaan $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$. Persamaan ini disebut persamaan umum sebuah hiperbola yang berpusat $M(\alpha, \beta)$ dengan sumbu utama sejajar sumbu x panjang sumbu mayor. Sedangkan pada hiperbola yang berpusat di O(0,0) sumbu utamanya bermpit dengan sumbu y, focus di $F_2(0,-c)$ dan $F_1(0,c)$ serta puncak di titik-titik $V_1(0,-a)$ dan $V_2(0,a)$ mempunyai persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$.

Jika $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ dengan $b^2 = c^2 - a^2$, didapat beberapa hal yang perlu diperhaikan yaitu :

(1) Hiperbola ini tidak memotong sumbu X
(2) Nilai eksentrisitasnya $e = \frac{c}{a}$
(3) Persamaan direktriksnya: $g_2 \equiv y = \frac{a}{e} dan\ g_1 \equiv y = \frac{a}{e}$
(4) Persamaan asimtotnya $y = \pm \frac{a}{b} x$

Apabila asimtot-asimtotnya saling tegak lurus maka disebut ***hiperbola orthogonal.***

Berdasarkan uraian di atas, diperoleh dua macam bentuk bake persamaan hiperbola yang berpusat di O(0,0) yaitu:

(1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan hiperbola horizontal.
(2) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan hiperbola vertical

hiperbola-hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan pada $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ disebut **dua hiperbola sekawan**.

Contoh:
Carilah persamaan hiperbola dengan titik puncak (±6,0) dan persamaan asimtotnya $y = \pm\frac{7}{6}x$

Penyelesaian :

Karena persamaan hiperbola dengan titik puncak (±6,0), maka merupakan hiperbola horizontal dengan a = 6 , dan persamaan asimtotnya $y = \pm\frac{7}{6}x$ berarti $\frac{b}{a} = \frac{7}{6} \rightarrow \frac{b}{6} = \frac{7}{6} \rightarrow b = 7$,
jadi persamaan hiperbola yang dimaksud berbentuk $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{7^2} = 1$ yaitu $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1$ atau $49x^2 - 36y^2 = 1764$

Sedangkan pada hiperbola yang berpusat di M(α,β) dengan sumbu utama sejajar dengan sumbu y, panjang sumbu mayor 2a dan panjang sumbu minor 2b. Dengan menggunakan definisi hiperbola yang serupa di atas, dapat diperoleh
persamaan hiperbola $\leftrightarrow \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$ dengan $b^2 = c^2 - a^2$ tetap berlaku pada hiperbola di atas, dapat ditemukan beberapa hal-hal sebagai berikut :

(a) Persamaan sumbu utama atau sumbu nyata adalah x = α dan persamaan sumbu sekawan atau sumbu imajiner adalah y = β
(b) Koordinat titik-titik puncak : $V_2(\alpha, \beta - a)$ dan $V_1(\alpha, \beta + a)$ koordinat titik ujung sumbu minor : $B_2(\alpha - b, \beta)$ dan $B_1(\alpha + b, \beta)$
(c) Koordinat titik focus : $F_2(\alpha, \beta - c)$ dan $F_1(\alpha, \beta + c)$
(d) Nilai eksentrisitas $e = \frac{c}{a}$
(e) Persamaan direktriks : $g_2 \equiv y = \beta + \frac{a}{e}\, dan\, g_1 \equiv y = \beta - \frac{a}{e}$
(f) Persamaan asimtot : $l_1 \equiv (y - \beta) = -\frac{a}{b}(x - \alpha)\ dan$

$l_2 \equiv (y - \beta) = \frac{a}{b}(x - \alpha)$

(g) Panjang latus rectum = $\frac{2b^2}{a}$

Contoh :
Tentukan persamaan hiperbola dengan ketentuan titik pusat di (2,-1), sebuah puncak di (4,-1) dan sebuah focus di (5,-1).

***Penyelesaian* :**
Misal pusat hiperbola $M(\alpha,\beta) = (2,1)$ maka berdasarkan sifat hiperbola, persamaan sumbu utama (nyata) adalah y = β atau y = -1
Persamaan sumbu sekawan (imajiner) adalah x = α artinya α = 2
Koordinat puncak (α+a, β) =(2+a,-1) =(4,-1), sehingga a = 2
Koordinat focus di (α + c, β) = (2+c,-1) = (5,-1) sehingga c = 3
$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$
Jadi persamaan hiperbola yang dimaksud berbentuk $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$
yaitu $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1$

D. Persamaan Garissinggung Pada Hiperbola dengan Gradien Tertentu

1. Untuk hiperbola yang berpusat di O(0,0)

Misalkan persamaan garis yang gradiennya m adalah y = mx + p dan persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Absis titik potong garis dan hiperbola diperoleh dari :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+p)^2}{b^2} = 1$ atau $b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mpx - a^2p^2 = a^2b^2$
$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mpx - a^2p^2 - a^2b^2 = 0$

dengan diskriminan $D = b^2 - 4ac$

$$= 4a^4m^2p^2 - 4(b^2 - a^2m^2 - b^2)(-a^2p^2 - a^2b^2)$$

$$= 4a^4m^2p^2 - 4(a^4m^2p^2 + a^4b^2m^2 - a^2b^2p^2 - a^2b^4)$$

$$= 4a^4m^2p^2 - 4a^4m^2p^2 - 4a^4b^2m^2 + 4a^2b^2p^2 + 4a^2b^4$$

$$D = 4a^2b^2(-a^2m^2 + b^2 + p^2)$$

Agar akarnya kembar (garis menyinggung hiperbola) syaratnya
$D = 0 \iff -a^2m^2 + b^2 + p^2 = 0$

$\iff p^2 = a^2m^2 - b^2$
$\iff p = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$

Jadi persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah
$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

Dengan analisis yang sama, persamaan garissinggung pada hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ dengan gardien m adalah $y = mx \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$

Contoh :

Tentukan persamaan garissinggung pada hiperbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ yang sejajar dengan garis 3x + y + 10 = 0.

Penyelesaian :
Gradien garis 3x + y + 10 = 0 adalah m = -3, berarti gradien garissinggungnya adalah –3. Jadi persamaan garissinggung pada hiperbola tersebut berbentuk $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$y = -3x \pm \sqrt{64^2 3^2 - 6^2}$
$y = -3x \pm \sqrt{540}$
$y = -3x \pm 6\sqrt{15}$

2. Untuk Hiperbola Yang Berpusat di M(α,β)

Rumus persamaan garissinggung hiperbola yang berpusat di M(α,β) dengan gradiennya m ditentukan dengan menggunakan analisis yang sama seperti mencari persamaan garissinggung hiperbola yang berpusat di O(0,0) dengan gradien m. Rumus-rumus yang dimaksudkan yaitu:

1. Persamaan garissinggung hiperbola $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah $y - \beta = m(x - \alpha) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

2. Persamaan garissinggung hiperbola $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$ dengan gradien m adalah $y - \beta = m(x - \alpha) \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$

Contoh :

Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{(x-1)^2}{100} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

Yang sejajar dengan garis x – 2y + 8 = 0.

Penyelesaian :

$\frac{(x-1)^2}{100} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ merupakan hiperbola horizontal dengan $a^2 = 100$ dan $b^2 = 9$. Garissinggung sejajar dengan garis x – 2y + 8 = 0 atau $=y = \frac{1}{2}x + 4$, berarti gradien garissinggungnya $m = \frac{1}{2}$

Persamaan garissinggungnya adalah :

$y - \beta = m(x - \alpha) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \pm \sqrt{10^2 \frac{1}{2}^2 - 3^2}$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \pm 4}$

$\Leftrightarrow$ 2y+ 4 = x – 1 ± 8

$\Leftrightarrow$ x - 2y - 5 ± 8 = 0

$\Leftrightarrow$ x – 2y – 13 = 0 atau x – 2y + 3 = 0

E. Persamaan Garissinggung Melalui Suatu Titik pada Hiperbola

1. Untuk hiperbola-hiperbola yang berpusat di O (0,0)

Diberikan persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan $P(x_2, y_2)$ pada hiperbola maka berlaku $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ atau $b^2x_2^2 - a^2y_2^2 = a^2b^2$ …(1)

dan $T(x_1, y_1)$ pada hiperbola maka berlaku $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ atau $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$………..(2)
dari persamaan (1) dan (2) diperoleh maka berlaku $b^2x_2^2 - a^2y_2^2 = b^2x_1^2 - a^2y_1^2$ atau $b^2x_1^2 - b^2x_2^2 = a^2y_1^2 - a^2y_2^2$

$\Leftrightarrow$ $b^2x_1^2 - b^2x_2^2 = a^2(y_1^2 - y_2^2)$

$\Leftrightarrow$ $b^2(x_1^2 - x_2^2) = a^2(y_1^2 - y_2^2)$

$\Leftrightarrow$ $b^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = a^2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ (gradien)

Persamaan garis PT adalah
$y - y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x - x_1)$ atau $y - y_1 = \frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}(x - x_1)$

jika P mendekati T sedemikian hingga P berimpit dengan T sehingga $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$, akibatnya $\overleftrightarrow{PT}$ menjadi garissinggung di titik T persamaannya adalah

$\Leftrightarrow$ $y - y_1 = \frac{b^2}{a^2}\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow$ $y - y_1 = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow$ $a^2y_1(y - y_1) = b^2x_1(x - x_1)$

$\Leftrightarrow$ $a^2y_1y - a^2y_1^2 = b^2x_1x - b^2x_1^2$

$\Leftrightarrow$ $b^2x_1x - a^2y_1y = b^2x_1^2 - a^2y_1^2$ kedua ruas persamaan dibagi dengan a^2b^2

$\Leftrightarrow$ $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ di titik T (x_1,y_1) adalah $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

Dengan menggunakan analisis yang sama, persamaan garis singgung hiberbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dititik T (x_1,y_1) adalah $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

Contoh :

Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ dititik $(3, \frac{1}{2})$

Penyelesaian :

$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} \leftrightarrow \frac{x_1 x}{8} - \frac{y_1 y}{2} = 1$

$\frac{3x}{8} - \frac{\frac{1}{2}y}{2} = 1 \leftrightarrow 3x - 2y = 8 \leftrightarrow 3x - 2y - 8 = 0$

2. Untuk Hiperbola Berpusat di M(α, β)

Dengan analisis yang sama pada persamaan garissinggung hiperbola berpusat di O(0, 0), maka

a. Persamaan garissinggung hiperbola, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ di titik T(x_1,y_1) adalah : $\frac{(x-\alpha)(x_1-\alpha)}{a^2} - \frac{(y-\beta)(y_1-\beta)}{b^2} = 1$

b. Persamaan garissinggung hiperbola $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ di titik T(x_1,y_1) adalah : $\frac{(y-\beta)(y_1-\beta)}{a^2} - \frac{(x-\alpha)(x_1-\alpha)}{b^2} = 1$

Contoh:

Tentukan persamaan garissinggung hiperbola $\frac{(x-1)^2}{12} - \frac{(y+2)^2}{48} = 1$ dititik (-3,2)

Penyelesaian :

$$\frac{(x-\alpha)(x_1-\alpha)}{a^2} - \frac{(y-\beta)(y_1-\beta)}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-1)(x_1-1)}{12} - \frac{(y+2)(y_1+2)}{48} = 1$$
$$\frac{(x-1)(-3-1)}{12} - \frac{(y+2)(2+2)}{48} = 1$$
$$\frac{-4x+4}{12} - \frac{4y+8}{48} = 1$$
$$-16x + 16 - 4y - 8 - 48 = 0$$

$$4x + y + 10 = 0$$

H. SOAL LATIHAN

1. Tentukan persamaan hiperbola yang berpusat di O(0,0), dengan titik-titik puncak di (± 3,0) dan melalui titik (6,9)
2. Tentukan nilai a supaya garis 4x + y + a = 0 menyinggung hiperbola $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$
3 Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ di titik (4,-4)
4. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{(y-13)^2}{144} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$ di titik (5,-2)
5. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $9x^2 - 16y^2 = 576$ yang tegak lurus terhadap garis 4x + 5y + 1 = 0

DAFTAR PUSTAKA

Tom M Apostol, 1967, *Calculus Volume 1,* The Republic of Singapore

George B Thomas JR & Ross L Finny, 1986, *Kalkulus & Geometri Analitik*, Erlangga: Surabaya

Maman Suherman, 1986, *Geometri Analitik Datar*, Modul 1-6, Universitas Terbuka: Jakarta

Yulius Hambali, 1986, *Geometri Analitik Ruang*, Modul 1-6, Universitas Terbuka: Jakarta